École Sup Galilée **2011-2012**
Filière MACS2
Mathématiques, Théorie Générale

Feuille de TD 1 : Rappels de calcul intégral

Exercice 1

Existe-t-il une fonction g intégrable sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $n\mathrm{e}^{-n|x|} \leq g(x)$?

Exercice 2

Calculer,

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t.$$

Exercice 3

Pour $\lambda \in]0, +\infty[$ on pose,

$$F(\lambda) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda t} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t.$$

Montrer que $\lambda \mapsto F(\lambda)$ est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$.

Exercice 4

1. Montrer que, pour tout $u \in [0, 1[$, $u + \log(1-u) \leq 0$.
2. Soit $\varphi \in C_0^\infty$. Calculer

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \int_{\mathbb{R}} \exp\left[\lambda^3 \log\left(1 - \frac{y^2}{\lambda^3}\right)\right] \varphi\left(\frac{y}{\lambda}\right) \mathrm{d}y.$$

Exercice 5

Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. On considère l'application

$$Tf \; : \; \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \int_0^1 f(x-y)\mathrm{d}y \end{array}.$$

1. Montrer que, si f est continue à support compact, Tf est continue.
2. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues à support compact qui converge vers f dans $L^1(\mathbb{R})$. Montrer que $(Tf_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers Tf uniformément sur $\mathbb{R}$. En déduire que Tf est continue sur $\mathbb{R}$.
3. En déduire que le produit de convolution sur $L^1(\mathbb{R})$ n'admet pas d'élément unité.

Exercice 6

Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(I)$. On suppose que :

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(I), \; \int_I f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Soit $[a, b] \subset I$ un intervalle.
1. En utilisant un argument de densité, montrer que :

$$\forall g \in C_0(I), \; \mathrm{supp}\, g \subset [a, b], \; \int_{[a,b]} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

2. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $h_\varepsilon \in C_0(]a, b[)$ telle que

$$\int_{[a,b]} |f(x) - h_\varepsilon|\,\mathrm{d}x \leq \varepsilon.$$

Montrer que :

$$\forall g \in C_0(]a, b[), \; \left| \int_{[a,b]} h_\varepsilon(x) g(x)\,\mathrm{d}x \right| \leq \varepsilon ||g||_\infty.$$

3. En choisissant bien $g \in C_0(]a, b[)$, montrer que $\int_{[a,b]} |h_\varepsilon|\,\mathrm{d}x \leq \varepsilon$.
4. En déduire que $f = 0$ presque partout sur I.