

## Feuille de TD 2 : Distributions - Exemples, ordre et support.

### Exercice 1

Soit  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ . Montrer que les expressions suivantes définissent des distributions dont on déterminera l'ordre et le support :

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(x^2) dx, \quad \int_{\mathbb{R}} \varphi'(x)e^{x^2} dx.$$

### Exercice 2

1. Soit  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ . Montrer que l'expression suivante définit une distribution  $T$  d'ordre au plus 1 :

$$\int_0^{+\infty} \varphi'(x) \log(x) dx.$$

2. Soit  $\varphi_n$  une fonction plateau valant 1 sur  $[\frac{1}{n}, 1]$  et dont le support est inclus dans  $[\frac{1}{2n}, 2]$ .

a. Minorer  $\langle T, \varphi_n \rangle$ .

b. En déduire que  $T$  est une distribution d'ordre exactement 1.

3. Déterminer le support de  $T$ .

### Exercice 3

Soit  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ .

1. Montrer qu'il existe  $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$  telle que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\varphi(x) = \varphi(0) + x\psi(x)$ .

2. Montrer que les limites

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \operatorname{Re} \left( \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x - i\varepsilon} dx \right) \text{ et } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \operatorname{Im} \left( \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x - i\varepsilon} dx \right)$$

existent.

3. En déduire que l'expression

$$\langle T, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x - i\varepsilon} dx$$

définit une distribution  $T$  dont on identifiera la partie réelle et la partie imaginaire. Donner l'ordre de  $T$ .

### Exercice 4

Soit  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ .

1. Montrer que l'expression suivante définit une distribution  $T$  d'ordre au plus 1 :

$$\langle T, \varphi \rangle = \int_0^{+\infty} (\varphi(1/t^2, \sin t) - \varphi(0, \sin t)) dt.$$

2. Calculer le support de  $T$ .

### Exercice 5

Soit  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalle ouvert et soit  $x_0 \in I$ . Montrer qu'il n'existe pas de fonction  $f \in L_{\text{loc}}^1(I)$  telle que  $T_f = \delta_{x_0}$ .

Indication : on pourra utiliser le résultat de l'exercice 6 de la Feuille 1.

### Exercice 6 - Distribution d'ordre infini

Soit  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ . Montrer que l'expression

$$\langle T, \varphi \rangle = \sum_{p=0}^{\infty} \varphi^{(p)}(p)$$

définit une distribution sur  $\mathbb{R}$ , d'ordre infini.

### Exercice 7 - Distributions à support nul

Soit  $T$  une distribution sur  $\mathbb{R}$  telle que  $\operatorname{supp} T = \{0\}$ .

1. Justifier que  $T$  est d'ordre fini. On notera  $m$  son ordre dans la suite.

2. Soit  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$  telle que  $\varphi(x) = o(x^m)$  au voisinage de 0. Soit  $\rho$  une fonction plateau valant 1 au voisinage de 0 et 0 hors de  $] -1, 1[$ . On note, pour  $r > 0$  et  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\rho_r(x) = \rho(x/r)$ .

a. Montrer que, si  $l \leq m$ , alors

$$\lim_{r \rightarrow 0} \sup_{|x| \leq r} |(\rho_r \varphi)^{(l)}(x)| = 0.$$

b. En déduire que  $\langle T, \varphi \rangle = 0$ .

3. Soit  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ . Montrer que  $\varphi$  s'écrit,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) = \sum_{k=0}^m \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} x^k + \psi(x),$$

où  $\psi$  est une fonction de classe  $C^\infty$  vérifiant  $\psi(x) = o(x^m)$  au voisinage de 0.

4. En déduire l'existence de nombres complexes  $a_0, \dots, a_m$  tels que, pour toute  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ ,

$$\langle T, \varphi \rangle = \sum_{k=0}^m a_k \varphi^{(k)}(0), \text{ soit encore, } T = \sum_{k=0}^m a_k \delta_0^{(k)}.$$