

Feuille de TD 3 : Distributions - Dérivation.

Exercice 1

Soit H la fonction indicatrice de $\mathbb{R}_+$.

1. a. Montrer que $H' = \delta_0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.
- b. Montrer que $(\log|x|)' = \text{vp}\left(\frac{1}{x}\right)$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.
- c. Montrer que, dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$,

$$\text{vp}\left(\frac{1}{x}\right)' = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2} dx - \frac{2\varphi(0)}{\varepsilon} \right) = \text{Pf}\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

2. Soit $m \in \mathbb{N}$. Calculer les dérivées successives dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ de la fonction $x \mapsto \frac{x^m}{m!} H(x)$.

Exercice 2

Soit $I =]a, b[$ et f et g deux fonctions de classe C^∞ sur I . On se propose de montrer que si $T \in \mathcal{D}'(I)$ vérifie $T' + fT = g$ au sens des distributions, alors T est donnée par une fonction C^∞ sur I qui vérifie cette équation différentielle au sens usuel.

1. Trouver une solution u_0 de $u' + fu = g$ qui soit de classe C^∞ sur I .
2. Conclure en mettant toute solution de $T' + fT = g$ sous la forme $T = u_0 + Se^{-F}$ où F est une primitive de f et S une distribution à déterminer.

Exercice 3

1. Résoudre, dans l'ensemble des fonctions localement intégrables sur $\mathbb{R}$, l'équation différentielle : $2xu' - u = 0$.
2. Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ une solution de l'équation $2xT' - T = 0$. Soit T_1 sa restriction à $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+^*)$ et soit T_2 sa restriction à $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_-^*)$.
 - a. Calculer T_1 et T_2 .
 - b. Soit $S = T - T_1 - T_2$. Vérifier que le support de S est inclus dans $\{0\}$.
 - c. Soit $R = \sum_{k=0}^p a_k \delta^{(k)} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ où les a_k sont dans $\mathbb{C}$. Montrer que : $2xR' - R = 0 \iff R = 0$.
 - d. En déduire les solutions dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ de l'équation $2xT' - T = 0$.
3. Résoudre, dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, l'équation différentielle :

$$2xT' - T = \delta_0.$$

Exercice 4

Soit h un C^1 -difféomorphisme de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit T l'application linéaire de $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2), \langle T, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x, h(x)) dx.$$

1. Montrer que $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$. Quel est son ordre ?
2. Déterminer le support de T .
3. En déduire qu'il n'existe pas de fonction continue sur $\mathbb{R}^2$ telle que T soit la distribution associée à cette fonction.
4. Calculer, au sens des distributions, $(\partial_x + h'(x)\partial_y)T$.

Exercice 5 - Équation de la chaleur

Soit H la fonction indicatrice de $\mathbb{R}_+^*$. On considère la fonction sur $\mathbb{R}^2$ donnée par :

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R}^2, E(x, t) = \frac{H(t)}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}.$$

1. Montrer que E définit une distribution sur $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que, pour tout $t > 0$ et tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\partial_t \left(\frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \right) = \partial_{xx} \left(\frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \right).$$

3. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$. On pose :

$$I_\varepsilon = - \int_{\mathbb{R}} \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}} \partial_t \varphi(x, t) dt dx,$$

et

$$J_\varepsilon = - \int_{\mathbb{R}} \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}} \partial_{xx}^2 \varphi(x, t) dt dx.$$

- a. Calculer $I_\varepsilon + J_\varepsilon$.
- b. En effectuant le changement de variable $y = \frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}$, déterminer la limite, lorsque ε tend vers 0, de $I_\varepsilon + J_\varepsilon$.

Indication : on pourra utiliser que $\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{u^2}{4}} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

4. Calculer $(\partial_t - \partial_{xx}^2)E$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$.

Exercice 6 - Équation de Cauchy-Riemann

On considère sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ la fonction donnée par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, f(x, y) = (x + iy)^{-1}.$$

1. Montrer que $f \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^2)$.
2. Soit $\bar{\partial}$ l'opérateur de Cauchy-Riemann défini par : $\bar{\partial} = \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y)$. Calculer $\bar{\partial}f$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$.

Indication : on pensera à effectuer un changement de variables en coordonnées polaires.