École Sup Galilée **2011-2012**
Filière MACS2
Mathématiques, Théorie Générale

Feuille de TD 4 : Distributions - Suites et convolution

Exercice 1

Calculer les limites, dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, des suites de distributions suivantes :

$$A_n = \sin(nx), \quad B_n = ng(nx) \text{ où } g \in L^1(\mathbb{R}),$$

$$C_n = \frac{1}{n}\sum_{p=0}^{n-1} \delta_{\frac{p}{n}}, \quad D_n = e^{\mathrm{i}nx}\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right).$$

Exercice 2

Soit $N \in \mathbb{N}$. On pose :

$$F_N \ : \ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-N}^{N} e^{\mathrm{i}kt} \end{array}.$$

La fonction $F_N \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$. On note T_N la distribution associée à F_N.

1. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$,

$$F_N(t) = \frac{1}{2\pi}\frac{\sin(\frac{(2N+1)t}{2})}{\sin\frac{t}{2}}.$$

2. Soit $M \in \mathbb{N}$. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ dont le support est inclus dans $[-(2M+1)\pi, (2M+1)\pi]$. Montrer que :

$$< T_N, \varphi >= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(\frac{(2N+1)t}{2})}{\sin\frac{t}{2}}\phi(t)\ \mathrm{d}t,$$

où, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\phi(t) = \sum_{k=-M}^{M}\varphi(t + 2k\pi)$.

3. En écrivant $\phi(t) = \phi(0) + t\psi(t)$ où ψ est de classe C^∞, montrer que la suite $(T_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ vers la distribution $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_{2\pi n}$.

Exercice 3

Montrer que la suite de distributions $(T_n)_{n\geq 1}$ définie par :

$$\forall n \geq 1,\ T_n = n(\delta_{\frac{1}{n}} - \delta_{-\frac{1}{n}}),$$

converge dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. L'ordre de la limite d'une suite de distributions d'ordre m est-il toujours m ?

Exercice 4

1. Calculer $\delta_0' \star \delta_0'$ pour $\delta_0 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

2. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Calculer $\delta_a' \otimes \delta_b'$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$.

3. Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une distribution $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, à support compact, telle que $E \star T = T^{(k)}$.

4. Soient T et S dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, S étant supposée à support compact. Pour $n \in \mathbb{N}$, on désigne par X^n la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $x \mapsto x^n$. Démontrer la formule suivante :

$$X^n(T \star S) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (X^k T) \star (X^{n-k}S).$$

Exercice 5

On note $\mathcal{D}'_+(\mathbb{R}) = \{T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}); \mathrm{supp}\ T \subset [0, +\infty[\}$. Soit $\chi \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que, $\chi = 1$ sur $]-\frac{1}{2}, +\infty[$ et $\chi = 0$ sur $]-\infty, -1[$.

1.a. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Montrer que l'application

$$\varphi^\Delta : (x, y) \mapsto \chi(x)\chi(y)\varphi(x + y),$$

est dans $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$.

b. Soient $T, S \in \mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$. On définit

$$< T \star S, \varphi >=< T_x \otimes S_y, \varphi^\Delta > .$$

Montrer que $T \star S$ est bien définie et est indépendante du choix de χ.

c. Montrer que $T \star S \in \mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$.

2. On dit que $T \in \mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$ est inversible, s'il existe $S \in \mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$ telle que $T \star S = \delta_0$. On note $S = T^{-1}$.

a. Montrer que δ_0' est inversible et calculer son inverse.

b. Montrer que, si $T \in C_0^\infty(]0, +\infty[)$, T n'est pas inversible.

Exercice 6 - Équation des ondes 1D

On considère la distribution de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ donnée par la fonction intégrable :

$$\forall (t, x) \in \mathbb{R}^2,\ E(x, t) = \left\{ \begin{array}{lll} \frac{1}{2} & \text{si} & t - |x| > 0 \\ 0 & \text{si} & t - |x| \leq 0 \end{array} \right. .$$

1. Calculer $(\partial_{tt}^2 - \partial_{xx}^2)E$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$.

2. En déduire une solution $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ de l'équation aux dérivées partielles :

$$\partial_{tt}^2 u - \partial_{xx}^2 u = f,$$

où $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ est à support compact.

3. Si $f \in C_0^\infty(\Omega)$, Ω ouvert de $\mathbb{R}^2$, que peut-on dire de u ?

Exercice 7 - Équation de Laplace

Soit $d \geq 1$. On considère la distribution de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ donnée par la fonction localement intégrable :

$$\forall x \in \mathbb{R}^d,\ E(x) = \begin{cases} x_+ = \max(x,0) & \text{si} \quad d=1 \\ \frac{1}{2\pi}\log|x| & \text{si} \quad d=2 \\ -\frac{1}{(d-2)\sigma(S^{d-1})}\frac{1}{|x|^{d-2}} & \text{si} \quad d \geq 3 \end{cases},$$

où $\sigma(S^{d-1})$ désigne l'aire de la sphère unité de $\mathbb{R}^d$.

1. Pour $d=1$, vérifier que $E'' = \delta_0$.

2. On suppose dans la suite $d \geq 2$. Soit $f \ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 et soit $F \in C^2(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}, F(x) = f(|x|)$. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\},\ \Delta F(x) = f''(|x|) + \frac{d-1}{|x|}f'(|x|).$$

3. Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle :

$$f''(r) + \frac{d-1}{r}f'(r) = 0.$$

4. Soit $F : \mathbb{R}^d \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ la fonction localement intégrable donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\},\ F(x) = \begin{cases} \log|x| & \text{si} \quad d=2 \\ \frac{1}{|x|^{d-2}} & \text{si} \quad d \geq 3 \end{cases}.$$

Soit $\varepsilon > 0$ et soit Ω_ε l'ouvert $\mathbb{R}^d \setminus B(0,\varepsilon)$. Soit enfin $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. En appliquant la formule de Green à F et φ sur l'ouvert Ω_ε, puis en faisant tendre ε vers 0, calculer $< \Delta F, \varphi >$.

5. En déduire que $\Delta E = \delta_0$, pour tout $d \geq 2$.

6. On admet le théorème de Liouville (version faible) : *Soit $u \in C^\infty(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$ telle que $\Delta u = 0$. Si $u(x)$ tend vers 0 lorsque $|x|$ tend vers l'infini alors u est nulle.*

a. Soit $\rho \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$ une distribution à support compact. Montrer que l'équation $-\Delta V = \rho$ admet une unique solution qui tend vers 0 à l'infini.

b. Calculer l'expression de cette solution pour $\rho = \delta_0$ (charge unique à l'origine) et pour $\rho = \delta'_{x_0}$ avec $x_0 \neq 0$ (cas du dipôle).