

Feuille de TD 6 : Espaces de Sobolev.

Exercice 1

Étudier l'appartenance des distributions suivantes à l'espace de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^n)$ en fonction de $s \in \mathbb{R}$ et de $n \geq 1$: $\delta_0, \delta'_0, \delta_0^{(k)}$ ($k \in \mathbb{N}^n$). Puis, pour $n = 1$, H la fonction de Heaviside et pour $n = 3$, la mesure de surface σ_R de la sphère de rayon R .

Exercice 2

Soit $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ telle que $\Delta(\Delta u) + 2\Delta u - u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ où $\Delta = \sum_{j=1}^n \partial_j^2$. Montrer que $u \in H^4(\mathbb{R}^n)$.

Exercice 3

Soit $\lambda > 0$. Montrer que l'opérateur différentiel $P = -\Delta + \lambda$ est un isomorphisme de $H^{s+2}(\mathbb{R}^n)$ dans $H^s(\mathbb{R}^n)$ pour tout $s \in \mathbb{R}$.

Exercice 4

Pour $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ et $t \geq 0$, on pose $u(t) = \mathcal{F}^{-1}(e^{-t\xi^2} \hat{f})$.

1. Montrer que pour tout $t \geq 0$, $u(t) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.
2. Montrer que si $f \in H^s(\mathbb{R})$ alors, pour tout $t \geq 0$, on a $u(t) \in H^s(\mathbb{R})$ et

$$\|u(t)\|_{H^s(\mathbb{R})} \leq \|f\|_{H^s(\mathbb{R})}.$$

3. On suppose que $f \in L^2(\mathbb{R})$. On note $D_x = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x}$. Montrer que, pour tout $t > 0$ et tout $k \in \mathbb{N}$, on a $D_x^k u(t) \in L^2(\mathbb{R})$ et qu'il existe une constante $C_k > 0$ telle que

$$\|D_x^k u(t)\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \frac{C_k}{t^{k/2}} \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$

- 4.a. On suppose que $f \in L^1(\mathbb{R})$. Montrer que pour tout $t > 0$, on a

$$u(t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} f(y) dy.$$

Indication : On pourra utiliser que la transformée de Fourier de $u(x) = e^{-ax^2}$ pour $a > 0$ est donnée par $\hat{u}(\xi) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}} e^{-\frac{\xi^2}{4a}}$.

- b. En déduire une majoration de $u(t)$ dans $L^\infty(\mathbb{R})$ pour $t > 0$.
5. On suppose que $f \in L^1(\mathbb{R})$ et que $xf \in L^1(\mathbb{R})$.
 - a. Montrer que $\hat{f} \in C^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$.
 - b. Montrer que pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, on a

$$|\hat{f}(\xi) - \hat{f}(0)| \leq |\xi| \|xf\|_{L^1(\mathbb{R})}.$$

- c. On pose $v(t, \xi) = (\hat{f}(\xi) - \hat{f}(0)) e^{-\frac{1}{2}t\xi^2}$. Montrer qu'il existe $C > 0$ telle que

$$|v(t, \xi)| \leq \frac{C}{\sqrt{t}} \|xf\|_{L^1(\mathbb{R})}.$$

- d. En déduire que l'on peut écrire

$$\forall x \in \mathbb{R}, u(t)(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x) dx \right) e^{-\frac{x^2}{4t}} + R(t)(x)$$

où $R(t) \in L^\infty(\mathbb{R})$ et qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\forall t > 0, \|R(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \frac{C}{t} \|xf\|_{L^1(\mathbb{R})}.$$

Exercice 5

1. Soit $s \in \mathbb{R}$. Démontrer l'inégalité

$$\forall \xi, \eta \in \mathbb{R}^n, (1 + |\xi|^2)^s \leq 2^{|s|} (1 + |\xi - \eta|)^{|s|} (1 + |\eta|)^s$$

2. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Montrer que pour tout $s \geq 0$, l'application $u \mapsto \varphi u$ est continue de $H^s(\mathbb{R}^n)$ dans lui-même.

Exercice 6-Paramétrix des opérateurs elliptiques

Soit $P = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha$ avec $D = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x}$ pour $x \in \mathbb{R}^n$. P est un opérateur différentiel à coefficients constants, d'ordre m , sur \mathbb{R}^n .

On associe à P le polynôme p défini par :

$$p(\xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \xi^\alpha,$$

puis on pose : $p_m(\xi) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha \xi^\alpha$. On dit alors que l'opérateur P est elliptique si : $p_m(\xi) = 0 \Rightarrow \xi = 0$.

1. Montrer qu'il existe $C_0 > 0$ tel que $|p_m(\xi)| \geq C_0 |\xi|^m$ puis qu'il existe $C_1 > 0$ et $R > 0$ tels que $|p(\xi)| \geq C_1 |\xi|^m$ pour $|\xi| \geq R$.
2. Soit $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\chi = 1$ sur $\{|\xi| \leq R\}$. On pose $v(\xi) = \frac{1-\chi(\xi)}{p(\xi)}$. Montrer que $v \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ et en déduire qu'il existe $E \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ et $\omega \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tels que : $PE = \delta_0 + \omega$. On dit que E est une paramétrix de P .
3. Soit $\beta \in \mathbb{N}^n$. Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tel que $\partial^\beta(x^\alpha E)$ soit continue. En déduire que $E \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$.
4. Soit $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Montrer que si $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ est telle que $Pu = f$, alors $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Exercice 7 - Inégalité de Poincaré

Soit $B = \{x \in \mathbb{R}^n ; |x| < 1\}$. On considère l'espace

$$E = \left\{ u \in H^1(B) ; \int_B u(x) dx = 0 \right\}.$$

On se propose de montrer qu'il existe $C > 0$ telle que

$$\forall u \in E, \|u\|_{L^2(B)} \leq C \|\nabla u\|_{L^2(B)}. \quad (1)$$

1. Montrer que E est un sous-espace fermé de $H^1(B)$.
2. En raisonnant par l'absurde, montrer que si (1) est fausse, il existe une suite $(u_k)_{k \geq 0}$ de E telle que

$\|u_k\|_{L^2(B)} = 1$ pour tout k et la suite $(\nabla u_k)_{k \geq 0}$ tend vers zéro dans $L^2(B)$.

3. En utilisant la compacité de l'injection de $H^1(B)$ dans $L^2(B)$, en déduire une contradiction.

4. En déduire qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\forall u \in H^1(B), \left\| u - \frac{1}{|B|} \int_B u(x) dx \right\|_{L^2(B)} \leq C \|\nabla u\|_{L^2(B)},$$

où $|B|$ désigne la mesure de Lebesgue de B .