Ecole Sup Galilée
Filière MACS 2
Mathématiques, Théorie Générale

2011-2012

1

Devoir Maison 1 - Correction

Exercice 1

1. Soient $\varepsilon > 0$ et $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$. Soit $M \geq 0$ tel que
$$\operatorname{supp} \varphi \subset \{ x : |x| \leq M \}.$$

La fonction $u\varphi$ est alors intégrable sur l'ensemble $\{x : |x| \geq \varepsilon\}$.

Posons $x = r\omega$ où $r \in [\varepsilon, +\infty[$ et $\omega \in S^{m-1}$. Alors :
$$\forall \varepsilon > 0, \quad I_\varepsilon = \int_{|x| \geq \varepsilon} u(x)\varphi(x)\,dx = \int_\varepsilon^M \int_{S^{m-1}} u(r\omega)\varphi(r\omega) r^{m-1}\,dr\,d\omega$$
$$= \int_\varepsilon^M \frac{1}{r}\left(\int_{S^{m-1}} u(\omega)\varphi(r\omega)\,d\omega \right) dr$$

d'après l'hypothèse faite sur u. On applique ensuite la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 1 à φ :
$$\varphi(r\omega) = \varphi(0) + \sum_{j=1}^m r\omega_j \int_0^1 \psi_j(tr\omega)\,dt \quad \text{avec } \psi_j = \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}.$$

D'où :
$$I_\varepsilon = \underbrace{\varphi(0)\left(\int_\varepsilon^M \frac{dr}{r}\right)\left(\int_{S^{m-1}} u(\omega)\,d\omega\right)}_{A_\varepsilon} + \underbrace{\sum_{j=1}^m \int_\varepsilon^M \int_{S^{m-1}} \int_0^1 \omega_j u(\omega) \psi_j(tr\omega)\,dt\,dr\,d\omega}_{B_\varepsilon}$$

Or, comme $u \in C^0(\mathbb{R}^m \setminus \{0\})$, il existe pour chaque $j \in \{1, \dots, m\}$ une constante $C_j > 0$ telle que :

②

$$\sup_{r\in[0,M]} \sup_{\omega\in S^{n-1}} \sup_{t\in[0,1]} |\omega_j u(\omega) \psi_j(tr\omega)| \leq C_j.$$

Par convergence dominée, B_ε admet une limite lorsque ε tend vers 0. Ainsi, I_ε admet une limite lorsque ε tend vers 0 si et seulement si A_ε en admet une.

Si $\int_{S^{n-1}} u(\omega)d\omega = 0$, alors $A_\varepsilon = 0$ pour toute $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ et tout $\varepsilon > 0$.

Si $\int_{S^{n-1}} u(\omega)d\omega \neq 0$, A_ε n'admet pas de limite pour les φ telles que $\varphi(0) \neq 0$ car $\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_\varepsilon^M \frac{dr}{r} = +\infty$.

D'où l'équivalence voulue.

2. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. On a :

$$|\langle T,\varphi\rangle| = \left| \sum_{j=1}^n \int_0^M \int_{S^{n-1}} \int_0^1 \omega_j u(\omega) \psi_j(tr\omega)\, dt\, dr\, d\omega \right|$$

$$\leq \sum_{j=1}^n \int_0^M \int_{S^{n-1}} \int_0^1 |\omega_j u(\omega) \psi_j(tr\omega)|\, dt\, dr\, d\omega$$

$$\leq C \sum_{j=1}^n \sup_{|x|\leq M} \left|\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right|$$, C constante indépendante de φ.

Donc T est une distribution d'ordre au plus 1.

Exercice 2 :

1. On a : $(xT)' = xT' + T$.

2. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. On a :

$$\langle x\, vp(\tfrac{1}{x}), \varphi \rangle = \langle vp(\tfrac{1}{x}), x\varphi \rangle$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{x\varphi(x)}{x}\, dx = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\, dx = \langle 1, \varphi \rangle.$$

Donc $x\, vp(\frac{1}{x}) = 1$.

3. Par la question 1., on a : $xT' + T = 0 \iff (xT)' = 0$.

Donc il existe $C_1 \in \mathbb{R}$ telle que $xT = C_1$.

Or par 2., $C_1\, vp(\frac{1}{x})$ est solution de l'équation $xT = C_1$.

D'où : $xT = C_1 \iff x\,(T - C_1\, vp(\frac{1}{x})) = 0$.

Donc, il existe $C_2 \in \mathbb{R}$ telle que :

$$T - C_1\, vp(\tfrac{1}{x}) = C_2\, \delta_0.$$

Soit enfin : $T = C_1\, vp(\frac{1}{x}) + C_2\, \delta_0$, $(C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$.