

①

Devoir maison 2 : CorrectionExercice 1:

Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Soit $R > 0$ tel que $\text{supp } \varphi \subset [-R, R]$.

On a:

$$\begin{aligned}
 \langle PT, \varphi \rangle &= \langle T'', \varphi \rangle + a \langle T', \varphi \rangle + b \langle T, \varphi \rangle \\
 &= \langle T, \varphi'' \rangle - a \langle T, \varphi' \rangle + b \langle T, \varphi \rangle \\
 &= - \int_{\mathbb{R}} h(x) \varphi''(x) dx + a \int_{\mathbb{R}} h(x) \varphi'(x) dx - b \int_{\mathbb{R}} h(x) \varphi(x) dx \\
 &= - \int_{-R}^R h(x) \varphi''(x) dx + a \int_{-R}^R h(x) \varphi'(x) dx - b \int_{-R}^R h(x) \varphi(x) dx \\
 &= - \int_{-R}^0 f(x) \varphi''(x) dx - \int_0^R g(x) \varphi''(x) dx + a \left(\int_{-R}^0 f(x) \varphi'(x) dx + \int_0^R g(x) \varphi'(x) dx \right) \\
 &\quad - b \left(\int_{-R}^0 f(x) \varphi(x) dx + \int_0^R g(x) \varphi(x) dx \right)
 \end{aligned}$$

Puis, on intègre par parties pour obtenir:

$$\begin{aligned}
 \langle PT, \varphi \rangle &= - \left(\left[f(x) \varphi'(x) \right]_{-R}^0 - \int_{-R}^0 f'(x) \varphi'(x) dx \right) - \left(\left[g(x) \varphi'(x) \right]_0^R - \int_0^R g'(x) \varphi'(x) dx \right) \\
 &\quad + a \left(\left[f(x) \varphi(x) \right]_{-R}^0 - \int_{-R}^0 f'(x) \varphi(x) dx + \left[g(x) \varphi(x) \right]_0^R - \int_0^R g'(x) \varphi(x) dx \right) \\
 &\quad - b \left(\int_{-R}^0 f(x) \varphi(x) dx + \int_0^R g(x) \varphi(x) dx \right)
 \end{aligned}$$

②

$$\begin{aligned}
 &= - \left(f(0) \varphi'(0) - \cancel{f(-R) \times 0} - \left([f'(x) \varphi(x)]_{-R}^0 - \int_{-R}^0 f''(x) \varphi(x) dx \right) \right) \\
 &\quad - \left(\cancel{g(R) \times 0} - g(0) \varphi'(0) - \left([g'(x) \varphi(x)]_0^R - \int_0^R g''(x) \varphi(x) dx \right) \right) \\
 &+ a \left(\cancel{f(0) \varphi(0)} - \cancel{f(0) \times 0} - \int_{-R}^0 f'(x) \varphi(x) dx + \cancel{g(R) \times 0} - g(0) \varphi(0) - \int_0^R g'(x) \varphi(x) dx \right) \\
 &- b \left(\int_{-R}^0 f(x) \varphi(x) dx + \int_0^R g(x) \varphi(x) dx \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -f(0) \varphi'(0) + f'(0) \varphi(0) + g(0) \varphi'(0) - g'(0) \varphi(0) - a g(0) \varphi(0) + a f(0) \varphi(0) \\
 &\quad - \int_{-R}^0 f''(x) \varphi(x) dx - a \int_{-R}^0 f'(x) \varphi(x) dx - b \int_{-R}^0 f(x) \varphi(x) dx \\
 &\quad - \int_0^R g''(x) \varphi(x) dx - a \int_0^R g'(x) \varphi(x) dx - b \int_0^R g(x) \varphi(x) dx
 \end{aligned}$$

D'où, en utilisant les propriétés 1., 2. et 3. :

$$\begin{aligned}
 \langle P_T, \varphi \rangle &= \varphi'(0) (\cancel{f(0)} - \cancel{f(0)}) + a \varphi(0) (\cancel{f(0)} - \cancel{f(0)}) + \varphi(0) (\underbrace{f'(0) - g'(0)}_{=1}) \\
 &\quad - \int_{-R}^0 \underbrace{(f''(x) + a f'(x) + b f(x))}_{=(P_f)(x)=0} \varphi(x) dx - \int_0^R \underbrace{(g''(x) + a g'(x) + b g(x))}_{=(P_g)(x)=0} \varphi(x) dx \\
 &= \varphi(0) = \langle \delta_0, \varphi \rangle.
 \end{aligned}$$

Donc, on a bien : $P_T = \delta_0$.

(3)

Exercice 2 :

Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. On mène $R > 0$ un réel tel que $\text{supp } \varphi \subset [-R, R]$. Soit $m \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} \langle T_m, \varphi \rangle &= \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(mt)}{\pi t} \varphi(t) dt \\ &= \int_{-R}^R \frac{\sin(mt)}{\pi t} \varphi(t) dt \end{aligned}$$

On, par la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 1, on peut écrire : $\forall t \in \mathbb{R}, \varphi(t) = \varphi(0) + t \psi(t)$ avec $\psi(t) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$.

Alors :

$$\langle T_m, \varphi \rangle = \frac{\varphi(0)}{\pi} \int_{-R}^R \frac{\sin(mt)}{t} dt + \frac{1}{\pi} \int_{-R}^R \psi(t) \sin(mt) dt$$

- On effectue le changement de variables $u = mt$ dans la première intégrale pour obtenir :
$$\int_{-R}^R \frac{\sin(mt)}{t} dt = \int_{-mR}^{mR} \frac{\sin(u)}{\frac{u}{m}} \frac{du}{m} = \int_{-mR}^{mR} \frac{\sin u}{u} du \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du$$

On, par parité, $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du = 2 \int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du = 2 \times \frac{\pi}{2} = \pi$.

- Puis, par le lemme de Riemann-Lebesgue, la seconde intégrale tend vers 0 lorsque m tend vers $+\infty$. On peut rapidement le redémontrer par I.P.P. :

$$\begin{aligned} \forall m \geq 1, \left| \frac{1}{\pi} \int_{-R}^R \psi(t) \sin(mt) dt \right| &= \left| \frac{1}{\pi} \left(\left[-\frac{\cos(mt)}{m} \psi(t) \right]_{-R}^R + \int_{-R}^R \frac{\cos(mt)}{m} \psi'(t) dt \right) \right| \\ \text{car } |\cos(mt)| \leq 1 &\Rightarrow \leq \frac{1}{\pi} \left(\frac{2}{m} \|\psi\|_\infty + \frac{2R}{m} \|\psi'\|_\infty \right) \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0. \end{aligned}$$

- Finalement on a obtenu que :

$$\langle T_m, \varphi \rangle \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} \frac{\varphi(0)}{\pi} \times \pi = \varphi(0) = \langle \delta_0, \varphi \rangle$$

Donc $(T_m)_{m \in \mathbb{N}}$ tend vers δ_0 dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.