

①

Devoir maison 3 : ConnectionExercice 1

1. Supposons par l'absurde qu'il existe un polynôme P tel que : $\forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq |P(x)|$.

$$\text{Alors : } \forall x \in \mathbb{R}, |\cos(e^x)| \leq \frac{|P(x)|}{e^x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.$$

D'où : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos(e^x) = 0$. Or, si on considère la

suite $(x_n)_{n \geq 1}$ définie par : $\forall n \geq 1, x_n = \log(2n\pi)$, on a :

$$x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty \text{ et } \forall n \geq 1, \cos(e^{x_n}) = \cos(2n\pi) = 1.$$

Donc, on ne peut pas avoir $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos(e^x) = 0$.

2. Soit $q \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$. Soient m et M dans $\mathbb{R}$. On a :

$$\int_m^M q(x) P(x) dx = \int_m^M q(x) \underbrace{e^x \cos(e^x)}_{\frac{d}{dx}(\sin(e^x))} dx = \left[q(x) \sin(e^x) \right]_m^M - \int_m^M q'(x) \sin(e^x) dx$$

$$\text{Alors : } |q(M) \sin(e^M) - q(m) \sin(e^m)| \leq |q(M)| + |q(m)|$$

$$\text{Or : } |q(m)| \xrightarrow[m \rightarrow -\infty]{} 0 \text{ et } |q(M)| \xrightarrow[M \rightarrow +\infty]{} 0 \text{ car } q \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$$

②

Puis, comme : $\forall x \in \mathbb{R}, |q'(x) \sin(e^x)| \leq |q'(x)|$ et que

$q' \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $\int_{-\infty}^{+\infty} q'(x) \sin(e^x) dx$ est absolument convergente.

On en déduit que $\int_{\mathbb{R}} f(x) q(x) dx$ est convergente.

3. Soit $q \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

$$|\langle S, q \rangle| = \left| \int_{\mathbb{R}} f(x) q(x) dx \right|$$

$$\text{par } \leq \rightarrow \leq \int_{\mathbb{R}} |\sin(e^x) q'(x)| dx$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}} \frac{1+x^2}{1+x^2} |q'(x)| dx$$

$$\leq \sup_{x \in \mathbb{R}} ((1+x^2) |q'(x)|) \int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{1+x^2} = \pi$$

$$\leq \pi \sup_{x \in \mathbb{R}} ((1+x^2) |q'(x)|)$$

Donc S est bien une distribution tempérée sur $\mathbb{R}$.

(3)

Exercice 21. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. On a:

$$\begin{aligned} \langle xT, \varphi \rangle &= \langle \text{vp}(\frac{1}{x}), x\varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{|x| > \varepsilon} \frac{x \varphi(x)}{x} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{|x| > \varepsilon} \varphi(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dx = \langle 1, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

Donc $xT=1$.2. Par 1., on a: $\mathcal{F}(xT) = \mathcal{F}(1)$. Or, $\mathcal{F}(1) = 2\pi\delta_0$ et $\mathcal{F}(xT) = -\frac{1}{i} \frac{d}{d\xi} (\mathcal{F}(T))$. Donc:

$$\frac{d}{d\xi} \hat{T} = -2i\pi\delta_0 \text{ et } \frac{d}{d\xi} (\hat{T} + 2i\pi H) = 0.$$

(car $H' = \delta_0$).

Donc, il existe une constante C telle que:

$$\hat{T} + 2i\pi H = C \quad \text{i.e.} \quad \hat{T} = -2i\pi H + C.$$

3. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. On a:

$$\langle \check{T}, \varphi \rangle = \langle T, \check{\varphi} \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x| > \varepsilon} \frac{\varphi(-x)}{x} dx$$

Posons, pour $\varepsilon > 0$ fixé, $u = -x$. Alors:

$$\int_{|x| > \varepsilon} \frac{\varphi(-x)}{x} dx = - \int_{|u| > \varepsilon} \frac{\varphi(u)}{-u} (-du) = - \int_{|u| > \varepsilon} \frac{\varphi(u)}{u} du$$

$$\begin{aligned} \text{D'où: } \langle \check{T}, \varphi \rangle &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} - \int_{|u| > \varepsilon} \frac{\varphi(u)}{u} du = - \langle \text{vp}(\frac{1}{x}), \varphi \rangle \\ &= \langle -T, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

D'où: $\check{T} = -T$. On dit que $\text{vp}(\frac{1}{x})$ est une distribution impaire.

(4)

Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ et soit $a \in \mathbb{R}$ tel que $\text{supp } \varphi \subset [-a, a]$

$$\begin{aligned} \text{On a: } \forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \widehat{\check{\varphi}}(\xi) &= \int_{-a}^a e^{-i\xi x} \varphi(-x) dx \\ &\stackrel{u=-x}{=} \int_a^{-a} e^{iu\xi} \varphi(u) (-du) \\ &= \int_{-a}^a e^{-iu(-\xi)} \varphi(u) du = \widehat{\varphi}(-\xi) = \check{\widehat{\varphi}}(\xi). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{D'où: } \langle \hat{T}, \check{\varphi} \rangle &= \langle T, \widehat{\check{\varphi}} \rangle = \langle T, \check{\widehat{\varphi}} \rangle = \langle \check{T}, \widehat{\varphi} \rangle \\ &= \langle -T, \widehat{\varphi} \rangle = \langle -\hat{T}, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

4. On déduit de 3. que $\hat{T}$ est une distribution impaire.

$$\text{Donc: } \forall \xi \in \mathbb{R}, \quad -2i\pi H(\xi) + C = -(-2i\pi H(-\xi) + C)$$

$$\text{D'où: } \forall \xi \in \mathbb{R}, \quad 2i\pi \underbrace{(H(\xi) + H(-\xi))}_{=1} = C$$

$$\text{Donc } C = i\pi.$$

$$\text{Finalement: } \boxed{\widehat{vp\left(\frac{1}{x}\right)} = -2i\pi H + i\pi.}$$

5. Par 4.: $2i\pi H = -\hat{T} + i\pi$

$$\text{D'où: } 2i\pi \hat{H} = -\hat{\hat{T}} + i\pi \hat{1} = -2\pi \check{T} + i\pi(2\pi\delta_0)$$

$$\stackrel{\text{car } \check{\check{T}} = T}{\rightarrow} = 2\pi T + 2i\pi^2 \delta_0$$

$$\text{Donc: } \boxed{\hat{H} = \frac{1}{i} vp\left(\frac{1}{x}\right) + \pi \delta_0}$$