Institut Galilée
Filière MACS 2
Mathématiques - Théorie Générale I

①

Feuille de TD 1 : Rappels de calcul intégral.

Exercice 1 :

Supposons par l'absurde qu'il existe $g \in L^1(\mathbb{R})$ telle que :

$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad n e^{-n|x|} \leq g(x).$

Comme les $x \mapsto n e^{-n|x|}$ sont mesurables et dominées par une fonction intégrable, on peut appliquer le théorème de convergence dominée :

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{\mathbb{R}} n e^{-n|x|} \, dx = \int_{\mathbb{R}} \lim_{n \to +\infty} n e^{-n|x|} \, dx = \int_{\mathbb{R}} 0 \, dx = 0.$$

Or : $\forall n \in \mathbb{N}, \int_{\mathbb{R}} n e^{-n|x|} \, dx = \int_{-\infty}^{0} n e^{nx} \, dx + \int_{0}^{+\infty} n e^{-nx} \, dx$

$= 1 + 1 = 2.$

Contradiction.

② Exercice 2

Soit $\mathbb{1}_{[0,\sqrt{n}]}(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in [0,\sqrt{n}] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$. Alors soit pour $n \geq 0$,

$$u_n = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n dt = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[0,\sqrt{n}]}(t)\left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n dt$$

Posons $f_n : t \mapsto \mathbb{1}_{[0,\sqrt{n}]}(t)\left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n$. Alors : $\forall t \in \mathbb{R}$, $f_n(t) \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-t^2}$

Alors : $\forall t \in \mathbb{R}$, $f_n(t) \leq e^{-t^2}$ qui est dans $L^1(\mathbb{R})$ et indépendante de n.

Par le TCD,

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to+\infty} f_n(t)\, dt = \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}.$$

Exercice 3 :

Nous allons appliquer le théorème de dérivabilité sous le signe intégral.

Soit $f : \begin{array}{l}]0,+\infty[\times]0,+\infty[\to \mathbb{R} \\ (\lambda,t) \mapsto e^{-\lambda t}\frac{\sin t}{t} \end{array}$. Alors $\lambda \mapsto f(\lambda,t)$ est de classe C^∞ sur $]0,+\infty[$ à $t \in]0,+\infty[$ fixé et $t \mapsto f(\lambda,t)$ est dans $L^1(]0,+\infty[)$ à λ fixé. (car fait continue et intégrable sur $]0,+\infty[$).

Soit $a > 0$. On fixe $t \in]0,+\infty[$. On a :

$\forall \lambda \in [a,+\infty[$, $|f(\lambda,t)| \leq e^{-at}\frac{\sin t}{t}$ qui est intégrable sur $]0,+\infty[$. et indépendant de λ

Donc F est continue sur $[a,+\infty[$.

De plus, $\forall \lambda \in [a,+\infty[$, $\left|\frac{\partial}{\partial\lambda}f(\lambda,t)\right| = \left|-t\, e^{-\lambda t}\frac{\sin t}{t}\right| = |e^{-\lambda t}\sin t| \leq e^{-at}$

qui est intégrable sur $]0,+\infty[$ et indépendant de λ.

Donc F est dérivable sur $[a,+\infty[$ de dérivée : $F'(\lambda) = \int_0^{+\infty} -e^{-\lambda t}\sin t\, dt$.

Enfin F est C^1 sur $[a,+\infty[$ car on peut appliquer le théorème de continuité sous le signe intégrale à F'. Soit $x_0 \in]0,+\infty[$. Il existe $a>0$ tel que $x_0 \in [a,+\infty[$. Alors F est C^1 sur $[a,+\infty[$ donc en x_0. Donc F est C^1 sur $]0,+\infty[$.

Exercice 4 :

1. On étudie les variations de $f : \begin{array}{l}[0,1[\to \mathbb{R} \\ u \mapsto u+\log(1-u)\end{array}$.

f est C^∞ sur $[0,1[$ et : $\forall u \in [0,1[$, $f'(u) = 1 - \frac{1}{1-u} \leq 0$.

Donc f est $\searrow$ et $f(0) = 0$. Donc : $\forall u \in [0,1[$, $f(u) \leq 0$.

2. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. On applique 1. avec $u = \frac{y^2}{\lambda^3}$ et, lorsque $|y| < \lambda^{3/2}$ (i.e $u \in [0,1[$), on a :

$$\lambda^3 \log\left(1-\frac{y^2}{\lambda^3}\right) \leq -y^2 \quad \left(= -\frac{y^2}{\lambda^3} \times \lambda^3\right).$$

Alors :

$$(*) \quad \exp\left(\lambda^3 \log\left(1-\frac{y^2}{\lambda^3}\right)\right) \left|\varphi\left(\frac{y}{\lambda}\right)\right| \leq e^{-y^2} \sup_{z \in \mathbb{R}} |\varphi(z)| \text{ / int sur } \mathbb{R} \text{ et ind de } \lambda.$$

Donc par le théorème de convergence dominée :

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(\lambda^3 \log\left(1-\frac{y^2}{\lambda^3}\right)\right) \varphi\left(\frac{y}{\lambda}\right) dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \lim_{\lambda \to +\infty} \exp\left(\lambda^3 \log\left(1-\frac{y^2}{\lambda^3}\right)\right) \varphi\left(\frac{y}{\lambda}\right) dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \varphi(0)\, e^{-y^2} dy = \sqrt{\pi}\, \varphi(0).$$

((*) En effet, pour λ assez grand, (*) est vérifiée. $\exists R > 0$ tq si $\varphi\left(\frac{y}{\lambda}\right) \neq 0$ on ait $|y| \leq R\lambda < \lambda^{3/2}$ (si $\sqrt{\lambda} > R$).

④

Exercice 5 :

1. Soit $f \in C_c(\mathbb{R})$, $\operatorname{supp} f \subset [a,b]$. Alors $f \in L^1(\mathbb{R})$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$ fixé, $y \mapsto f(x-y)$ est aussi dans $L^1(\mathbb{R})$. Donc Tf est bien définie. De plus comme f est continue, $x \mapsto f(x-y)$ l'est aussi et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in [0,1],\ |f(x-y)| \leq M\, \mathbb{1}_{[a-1,b+1]}(y)$$

Or $y \mapsto M\,\mathbb{1}_{[a-1,b+1]}(y) \in L^1(\mathbb{R})$ et cette majoration est uniforme en x. Par le théorème de continuité sous le signe intégral, Tf est continue.

2. Comme $C_c(\mathbb{R})$ est dense dans $L^1(\mathbb{R})$, pour toute $f \in L^1(\mathbb{R})$, il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions continues à support compact qui converge vers f dans $L^1(\mathbb{R})$. Alors :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |Tf_n(x) - Tf(x)| \leq \int_0^1 |f_n(x-y) - f(x-y)|\,dy \leq \|f_n - f\|_1.$$

Et : $$\sup_{x\in\mathbb{R}} |Tf_n(x) - Tf(x)| \leq \|f - f_n\|_1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Donc (Tf_n) converge uniformément vers Tf sur $\mathbb{R}$. Par 1., chaque Tf_n est continue, donc Tf l'est aussi.

3. On a : $Tf = f * \mathbb{1}_{[0,1]}$. Si par l'absurde, il existe $u \in L^1(\mathbb{R})$ telle que : $\forall f \in L^1(\mathbb{R})$, $f * u = f$, alors :

$$Tu = u * \mathbb{1}_{[0,1]} = \mathbb{1}_{[0,1]}.$$ Mais, par 2., Tu est continue sur $\mathbb{R}$ alors que $\mathbb{1}_{[0,1]}$ ne l'est pas. Contradiction.

Exercice 6 :

1. L'espace $C_0^\infty(I)$ est dense dans $C_0(I)$ pour la norme infinie. Plus précisément, soit $g \in C_0(I)$ avec $\operatorname{supp} g \subset [a,b] \subset I$. Alors, il existe une suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\varphi_n \in C_0^\infty(I)$ avec $\operatorname{supp} \varphi_n \subset [a',b'] \subset I$, et on peut même prescrire $[a,b] \subset [a',b']$, telle que (φ_n) converge uniformément vers g sur $[a,b]$. Alors :

$$\left|\int_I f(x)\left(g(x)-\varphi_n(x)\right)dx\right| \leq \underbrace{\left(\int_{a'}^{b'} |f(x)|\,dx\right)}_{<\infty \text{ car } f\in L^1_{loc}(I)} \overbrace{\|g-\varphi_n\|_\infty}^{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Or : $\forall n\in\mathbb{N}$, $\int_I f(x)\varphi_n(x)\,dx = 0$ par hypothèse.

Donc : $\displaystyle\int_{[a,b]} f(x)g(x)\,dx = \int_I f(x)g(x)\,dx = 0.$

2. Comme $f\in L^1([a,b])$, pour tout $\varepsilon>0$ il existe $h_\varepsilon \in C_0(]a,b[)$ telle que : $\displaystyle\int_a^b |f(x)-h_\varepsilon(x)|\,dx \leq \varepsilon$. Soit $g\in C_0(]a,b[)$.

Alors : $\displaystyle\int_a^b h_\varepsilon(x)g(x)\,dx = \int_a^b (h_\varepsilon(x)-f(x))g(x)\,dx + \underbrace{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}_{=0 \text{ par } 1.}$

D'où :
$$\left|\int_a^b h_\varepsilon(x)g(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |h_\varepsilon(x)-f(x)|\,|g(x)|\,dx \leq \varepsilon\|g\|_\infty.$$

(6) **3.** Soit $\delta > 0$. On teste l'inégalité obtenue en **2.** sur la fonction $g = \frac{h_\varepsilon}{\delta + |h_\varepsilon|}$. La présence du $\delta > 0$ nous assure la continuité de g.

On a : $\|g\|_\infty \leq 1$. De plus :

$$\int_a^b h_\varepsilon(x) g(x)\, dx = \int_a^b \frac{|h_\varepsilon(x)|^2}{\delta + |h_\varepsilon(x)|} dx \leq \varepsilon \|g\|_\infty \leq \varepsilon.$$

De là, par le théorème de convergence dominée ($|h_\varepsilon| \in L^1([a,b])$), on peut faire tendre δ vers 0 pour obtenir :

$$\int_a^b |h_\varepsilon(x)|\, dx = \int_a^b \lim_{\delta \to 0} \frac{|h_\varepsilon(x)|^2}{\delta + |h_\varepsilon(x)|} dx = \lim_{\delta \to 0} \int_a^b \frac{|h_\varepsilon(x)|^2}{\delta + |h_\varepsilon(x)|} dx \leq \varepsilon.$$

4. Il vient, d'après la définition de h_ε et d'après **3.** :

$$\begin{aligned}\int_a^b |f(x)|\, dx &= \int_a^b |f(x) - h_\varepsilon(x) + h_\varepsilon(x)|\, dx \\ &\leq \int_a^b |f(x) - h_\varepsilon(x)|\, dx + \int_a^b |h_\varepsilon(x)|\, dx \\ &\leq 2\varepsilon.\end{aligned}$$

Donc $\int_a^b |f(x)|\, dx = 0$. Cela est valable pour tout $[a,b] \subset I$, donc $f = 0$ p.p sur I.