École Sup Galilée — Année 2011 - 2012

Filière MACS2

Mathématiques - Théorie Générale

①

Feuille de TD2 : Distributions - Exemples, ordre et support.

Exercice 1 :

a. Soit $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\operatorname{supp}\varphi \subset [a,b]$.

L'application $T : \varphi \mapsto \int_{\mathbb{R}} \varphi(x^2)\,dx$ est une forme linéaire sur $C_0^\infty(\mathbb{R})$ et :

$$\left|\int_{\mathbb{R}} \varphi(x^2)\,dx\right| = \left|\int_a^b \varphi(x^2)\,dx\right| \leq \int_a^b |\varphi(x^2)|\,dx \leq \|\varphi\|_\infty \underbrace{\int_{x^2\in[a,b]} dx}_{= C\,\|\varphi\|_\infty}$$

Donc T est une distribution d'ordre au plus 0, donc d'ordre exactement 0. Déterminons son support.

Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}_-^*)$. Alors $\langle T,\varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x^2)\,dx = 0$ car $\operatorname{supp}\varphi \subset \mathbb{R}_-^*$ implique que $\varphi(y) = 0$ pour $y \geq 0$.

Donc $(\operatorname{supp} T)^c \supset \mathbb{R}_-^*$ et $\operatorname{supp} T \subset \mathbb{R}_+$.

Réciproquement, soit $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $\delta > 0$ tel que $x_0 - \delta > 0$ et soit $V_\delta =]x_0-\delta, x_0+\delta[$. Soit φ une fonction "pic", $\varphi \in C_0^\infty(V_\delta)$, $\varphi \geq 0$ et $\varphi(x_0) = 1$. En particulier, φ est strictement positive sur $V_{\delta'} =]x_0-\delta', x_0+\delta'[$ avec $0<\delta'<\delta$ et $V_{\delta'} \subset V_\delta$, $x_0 \in V_{\delta'}$. On a de plus :

$$\langle T,\varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x^2)\,dx = \int_{x^2\in V_\delta} \varphi(x^2)\,dx = \int_{\sqrt{x_0-\delta}}^{\sqrt{x_0+\delta}} \varphi(x^2)\,dx = \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \varphi(y)\,dy \geq \int_{x_0-\delta'}^{x_0+\delta'} \varphi(y)\,dy > 0$$

Donc T est non nulle au voisinage de x_0. Donc $\mathbb{R}_+^* \subset \operatorname{supp} T$. Comme $\operatorname{supp} T$ est fermé, on a $\mathbb{R}_+ \subset \operatorname{supp} T$. Donc : $\operatorname{supp} T = \mathbb{R}_+$.

(2)

b. L'application $T : \varphi \mapsto \int_{\mathbb{R}} \varphi'(x) e^{x^2} dx$ est une forme linéaire sur $C_0^\infty(\mathbb{R})$.
Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ et soit $[a,b] \subset \mathbb{R}$ tel que $\operatorname{supp}\varphi \subset [a,b]$. Alors :

$$\left| \int_{\mathbb{R}} \varphi'(x) e^{x^2} dx \right| = \left| \underbrace{\left[\varphi(x) e^{x^2} \right]_a^b}_{=0 \text{ car } \varphi(a)=\varphi(b)=0} - \int_a^b \varphi(x) \times 2x e^{x^2} dx \right|$$

$$\leq \int_a^b |\varphi(x)|\, |2x e^{x^2}|\, dx \leq \|\varphi\|_\infty \left(e^{b^2} - e^{a^2} \right) = C \|\varphi\|_\infty .$$

Donc T est une distribution d'ordre au plus 0, donc d'ordre 0. Calculons le support de T. Soit $x_0 \in \mathbb{R}^*$ et $\delta > 0$ tel que $V_\delta =]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\subset \mathbb{R}^*$.
Soit $\varphi \in C_0^\infty(V_\delta)$, $\varphi(x_0) = 1$ et $\varphi \geqslant 0$. Par ailleurs, $f : x \mapsto 2x e^{x^2}$ a un signe constant sur V_δ, disons strictement positif. Donc :
$\exists \delta' < \delta$, $\langle T, \varphi \rangle \geqslant \int_{V_{\delta'}} \varphi(x) f(x) dx > 0$. (cf a.)

Donc $\mathbb{R}^* \subset \operatorname{supp} T$ et comme $\operatorname{supp} T$ est fermé, $\mathbb{R} \subset \operatorname{supp} T$.
Donc $\operatorname{supp} T = \mathbb{R}$.

(3)

Exercice 2 :

1. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. L'application $T : \varphi \mapsto \int_0^{+\infty} \varphi'(x) \log(x)\, dx$ est une forme linéaire sur $C_0^\infty(\mathbb{R})$. Soit $[a,b] \subset \mathbb{R}$ tel que $\operatorname{supp}\varphi \subset [a,b]$. Alors :

$$|\langle T,\varphi\rangle| = \left| \int_0^{+\infty} \varphi'(x)\log(x)\,dx \right| = \left| \int_{[a,b]\cap\mathbb{R}^+} \varphi'(x) \log x \, dx \right| \leq \|\varphi'\|_\infty \underbrace{\left| \int_{[a,b]\cap\mathbb{R}^+} \log x \, dx \right|}_{\text{constante car } x\mapsto \log x \text{ est intégrable en } 0}$$

Donc T est une distribution d'ordre au plus 1.

2.a. Avec φ_n comme dans l'énoncé, on a :

$$|\langle T,\varphi_n\rangle| = \left| \int_{\frac{1}{2n}}^{2} \varphi'(x) \log x \, dx \right| = \left| \underbrace{\left[\varphi(x)\log x\right]_{\frac{1}{2n}}^{2}}_{=0} - \int_{\frac{1}{2n}}^{2} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx \right|$$

$$\geq \int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx = \int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{dx}{x} = \log n.$$

Donc : $\forall n \geq 1$, $|\langle T,\varphi_n\rangle| \geq \log n$. $\left(\xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty\right)$

b. Or, $\|\varphi_n\|_\infty = 1$ pour tout $n \geq 1$. Donc, avec $[a,b]=[0,2]$, il existe $[a,b] \subset \mathbb{R}$, tel que pour tout $C>0$ et tout $n\geq 1$, il existe $\varphi_n \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\operatorname{supp}\varphi_n \subset [0,2]$ et : $|\langle T,\varphi_n\rangle| \geq C\|\varphi_n\|_\infty = C$. (car $\log n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$).

Donc T n'est pas d'ordre 0, elle est donc d'ordre 1.

3. Tout d'abord, si $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ avec $\operatorname{supp}\varphi \subset \mathbb{R}_-^*$, alors :

$$\langle T,\varphi\rangle = \int_0^{+\infty} \varphi'(x) \log x \, dx = 0 \quad \text{car } \varphi \equiv 0 \text{ sur } [0,+\infty[.$$

Donc $\operatorname{supp} T \subset \mathbb{R}_+$.

Réciproquement, soit $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et soit $\delta > 0$ tel que $]x_0-\delta, x_0+\delta[\subset \mathbb{R}_+^*$. Soit $\varphi \in C_0^\infty(]x_0-\delta,x_0+\delta[)$, $\varphi(x_0)=1$ et $\varphi \geq 0$. Alors :

$$\langle T,\varphi\rangle = \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \varphi'(x)\log x\,dx = -\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx < 0. \quad \text{Donc } \langle T,\varphi\rangle \neq 0.$$

Donc $x_0 \in \operatorname{supp} T$ et $\mathbb{R}_+^* \subset \operatorname{supp} T$. Comme $\operatorname{supp} T$ est fermé, $\mathbb{R}_+ \subset \operatorname{supp} T$. Donc $\operatorname{supp} T = \mathbb{R}_+$.

④ Exercice 3

1. • Soient $\varepsilon > 0$ et $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. On a :

$$\mathrm{Re}\left(\int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x-i\varepsilon}\,dx\right) = \mathrm{Re}\left(\int_{\mathbb{R}} \frac{(x+i\varepsilon)\varphi(x)}{x^2+\varepsilon^2}\,dx\right) = \int_{\mathbb{R}} \frac{x\varphi(x)}{x^2+\varepsilon^2}\,dx$$

Soit $[-a,a] \subset \mathbb{R}$, $a > 0$, tel que $\mathrm{supp}\,\varphi \subset [-a,a]$.

Alors :
$$\mathrm{Re}\left(\int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x-i\varepsilon}\,dx\right) = \int_{-a}^{a} \frac{x\varphi(x)}{x^2+\varepsilon^2}\,dx$$

On écrit $\varphi(x) = \varphi(0) + x\psi(x)$ avec $\psi(x) = \int_0^1 \varphi'(xu)\,du$, $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$

et $\mathrm{supp}\,\psi \subset [-a,a]$. Alors :

$$\mathrm{Re}\left(\int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x-i\varepsilon}\,dx\right) = \underbrace{\int_{-a}^{a} \frac{x\varphi(0)}{x^2+\varepsilon^2}\,dx}_{=0 \text{ par imparité}} + \int_{-a}^{a} \frac{x^2\psi(x)}{x^2+\varepsilon^2}\,dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \frac{x^2\psi(x)}{x^2+\varepsilon^2} \mathbb{1}_{[-a,a]}(x)\,dx$$

On : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{x^2\psi(x)}{x^2+\varepsilon^2}\mathbb{1}_{[-a,a]}(x) \xrightarrow[\varepsilon \to 0^+]{} \psi(x)\mathbb{1}_{[-a,a]}(x)$

et $\forall \varepsilon > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, $\left|\dfrac{x^2\psi(x)}{x^2+\varepsilon^2}\mathbb{1}_{[-a,a]}(x)\right| \leq |\psi(x)|\,\mathbb{1}_{[-a,a]}(x) \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$.

5

Donc, par le théorème de convergence dominée, on a:

$$\operatorname{Re}\left(\int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x-i\varepsilon}\,dx\right) \xrightarrow[\varepsilon\to 0^+]{} \int_{-a}^{a} \psi(x)\,dx = \langle vp(\tfrac{1}{x}), \varphi\rangle$$

Donc la limite existe et vaut $\langle vp(\frac{1}{x}), \varphi\rangle$.

- Soient $\varepsilon > 0$ et $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. On a, pour $[-a,a] \subset \mathbb{R}$, $a>0$, tel que $\operatorname{supp}\varphi \subset [-a,a]$,

$$\operatorname{Im}\left(\int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x-i\varepsilon}\,dx\right) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\varepsilon\varphi(x)}{x^2+\varepsilon^2}\,dx = \int_{-a}^{a} \frac{\varepsilon\varphi(x)}{x^2+\varepsilon^2}\,dx$$

Si on pose $y = x/\varepsilon$, alors $dx = \varepsilon\,dy$ et:

$$\operatorname{Im}\left(\int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x-i\varepsilon}\,dx\right) = \int_{-a/\varepsilon}^{a/\varepsilon} \frac{\varepsilon\varphi(\varepsilon y)}{(\varepsilon y)^2+\varepsilon^2}\,\varepsilon\,dy = \int_{-a/\varepsilon}^{a/\varepsilon} \frac{\varphi(\varepsilon y)}{1+y^2}\,dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(\varepsilon y)}{1+y^2}\,\mathbb{1}_{[-a/\varepsilon,\, a/\varepsilon]}(y)\,dy$$

Or, $\forall \varepsilon>0, \forall y \in \mathbb{R}$, $\left|\frac{\varphi(\varepsilon y)}{1+y^2}\mathbb{1}_{[-a/\varepsilon,\,a/\varepsilon]}(y)\right| \leq \frac{\|\varphi\|_\infty}{1+y^2} \in L^1(\mathbb{R})$

et $\forall y \in \mathbb{R}$, $\frac{\varphi(\varepsilon y)}{1+y^2}\mathbb{1}_{[-a/\varepsilon,\,a/\varepsilon]}(y) \xrightarrow[\varepsilon\to 0^+]{} \frac{\varphi(0)}{1+y^2}$

Par le théorème de convergence dominée :

$$\operatorname{Im}\left(\int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x-i\varepsilon}\,dx\right) \xrightarrow[\varepsilon\to 0^+]{} \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(0)}{1+y^2}\,dy = \pi\varphi(0) = \pi\langle\delta_0, \varphi\rangle.$$

Donc la limite existe et vaut $\pi\langle\delta_0,\varphi\rangle$.

2. On en déduit que l'expression $\langle T, \varphi\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x-i\varepsilon}\,dx$ est bien définie et vaut: $\langle T,\varphi\rangle = \langle vp(\frac{1}{x}), \varphi\rangle + i\pi\langle\delta_0,\varphi\rangle$.

Soit encore $T = vp(\frac{1}{x}) + i\pi\delta_0$ qui est une distribution d'ordre 1.

Exercice 4 :

1. Soit $[-a,a]^2 \subset \mathbb{R}^2$ un compact $(a>0)$ et soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, $\operatorname{supp}\varphi \subset [-a,a]^2$.

Alors:

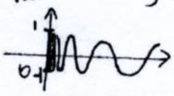
$$|\langle T,\varphi\rangle| = \left|\int_0^{+\infty} \left(\varphi\left(\frac{1}{t^2}, \sin t\right) - \varphi(0,\sin t)\right) dt\right| = \left|\int_0^{+\infty} \underbrace{\int_0^1 \partial_x \varphi\left(\frac{s}{t^2}, \sin t\right)\frac{ds}{t^2}}_{=\left[\varphi\left(\frac{s}{t^2},\sin t\right)\right]_0^1} dt\right|$$

$$\leq \int_{\frac{1}{\sqrt{a}}}^{+\infty} \left|\int_0^1 \partial_x \varphi\left(\frac{s}{t^2}, \sin t\right)\right| ds \, \frac{dt}{t^2}$$

$$\leq \|\partial_x \varphi\|_\infty \int_{\frac{1}{\sqrt{a}}}^{+\infty} \frac{dt}{t^2} = \|\partial_x\varphi\|_\infty \left[-\frac{1}{t}\right]_{\frac{1}{\sqrt{a}}}^{+\infty} = \sqrt{a}\,\|\partial_x\varphi\|_\infty .$$

Comme T est une forme linéaire sur $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, cette estimée de $|\langle T,\varphi\rangle|$ nous dit que T est une distribution d'ordre au plus 1

2. Montrons que si $S = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; y = \sin\frac{1}{\sqrt{x}},\ x>0\right\}$, alors $\operatorname{supp} T = \overline{S} = S \cup (\{0\}\times[-1,1])$.



- Soit $x_0 \notin \overline{S}$. Alors, il existe $\varepsilon>0$, $\overline{B}(x_0,\varepsilon) \subset \overline{S}^c$.

  Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, $\operatorname{supp}\varphi \subset \overline{B}(x_0,\varepsilon)$. Alors par définition de T, $\langle T,\varphi\rangle = 0$ car: $\forall t>0$, $\left(\frac{1}{t^2}, \sin t\right) \notin \overline{B}(x_0,\varepsilon)$ et $(0,\sin t) \notin \overline{B}(x_0,\varepsilon)$

  Donc $x_0 \notin \operatorname{supp} T$ et $\operatorname{supp} T \subset \overline{S}$.

- Réciproquement, soit $x_0 \in S$ et soit $\varepsilon>0$ tel que $B(x_0,\varepsilon) \cap (\{0\}\times[-1,1]) = \emptyset$.

  Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ telle que $\operatorname{supp}\varphi \subset B(x_0,\varepsilon)$, $\varphi = 1$ sur $\overline{B}(x_0, \frac{\varepsilon}{2})$ et $\varphi \geq 0$. Alors:

$$\langle T,\varphi\rangle = \int_0^{+\infty} \varphi\left(\frac{1}{t^2}, \sin t\right) dt \geq t_2 - t_1 > 0 .$$

  où t_1 est tel que $x_0 = \left(\frac{1}{t_1^2}, \sin t_1\right)$ et $t_2 = \inf\left\{t>t_1,\ \left(\frac{1}{t^2}, \sin t\right) \notin \overline{B}(x_0,\frac{\varepsilon}{2})\right\}$

  Alors, T est non nulle au voisinage de x_0 et $S \subset \operatorname{supp} T$. Comme $\operatorname{supp} T$ est fermé, $\overline{S} \subset \operatorname{supp} T$ et finalement, $\operatorname{supp} T = \overline{S}$.

Exercice 5 :

Supposons par l'absurde qu'il existe $f \in L^1_{loc}(I)$ telle que $\delta_{x_0} = T_f$.

Alors : $\forall \varphi \in C_0^\infty(I)$, $\int_I f(x)\varphi(x)\,dx = \varphi(x_0)$ $(*)$.

En particulier : $\forall \varphi \in C_0^\infty(I)$, $x_0 \notin \operatorname{supp}\varphi$, $\int_I f(x)\varphi(x)\,dx = 0$.

Soit $J = I \cap \{x < x_0\}$ et supposons $\operatorname{supp}\varphi \subset J$.

Alors $\int_J f\varphi = 0$ et $f = 0$ sur J d'après l'exercice 4 de la Feuille de TD 1.

De même, $f = 0$ sur $J' = I \cap \{x > x_0\}$. Comme $I = J \cup \{x_0\} \cup J'$, $f = 0$ presque partout sur I ($Leb(\{x_0\}) = 0$) et :

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(I), \int_I f(x)\varphi(x)\,dx = 0 \quad (**),$$

Mais, si $\varphi \in C_0^\infty(I)$ est telle que $\varphi(x_0) \neq 0$, alors $(**)$ contredit $(*)$.

Donc, il ne peut exister $f \in L^1_{loc}(I)$ telle que $\delta_{x_0} = T_f$.

Exercice 6 - Distribution d'ordre infini.

- $T : \varphi \mapsto \sum_{p=0}^{\infty} \varphi^{(p)}(p)$ est une forme linéaire sur $C_0^{\infty}(\mathbb{R})$, continue.

Donc $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. En effet si $[-a,a] \subset \mathbb{R}$, $\varphi \in C_0^{\infty}(\mathbb{R})$ avec $\operatorname{supp}\varphi \subset [-a,a]$, en posant $p_0 = E(a)+1$, on a:

$$|\langle T,\varphi\rangle| = \left|\sum_{p=0}^{+\infty} \varphi^{(p)}(p)\right| = \left|\sum_{p=0}^{p_0} \varphi^{(p)}(p)\right| \leq \underbrace{\sum_{p=0}^{p_0}}_{\text{somme finie}} \|\varphi^{(p)}\|_{\infty}.$$

- Supposons par l'absurde que T est d'ordre fini m.

Soit $\psi_0 \in C_0^{\infty}(]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[)$, égale à 1 sur $[-\frac{1}{4},\frac{1}{4}]$, positive. Soit $\lambda > 1$

Posons $\psi(x) = \dfrac{x^{m+1}}{(m+1)!}\psi_0(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$ et $\varphi(x) = \psi(\lambda(x-(m+1)))$.

On considère le compact $K = [m+\frac{1}{2}, m+\frac{3}{2}]$ de $\mathbb{R}$. Comme $\lambda > 1$, φ est à support dans K et est C^{∞}. D'autre part, par la formule de Leibnitz, on a: $\psi^{(m+1)}(0) = \psi_0(0) = 1$.

Puis, comme $\operatorname{supp}\varphi \subset K$, on a: $\langle T,\varphi\rangle = \varphi^{(m+1)}(m+1) = \lambda^{m+1}\psi^{(m+1)}(0)$
$= \lambda^{m+1}$.

D'autre part, pour $j \leq m$, on a:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |\varphi^{(j)}(x)| \leq \lambda^{j} \sup |\psi^{(j)}(x)| \leq \lambda^{j}\|\psi^{(j)}\|_{\infty}.$$

Or, T est supposée d'ordre m, donc pour $K = [m+\frac{1}{2}, m+\frac{3}{2}]$, il existe $C_K \in \mathbb{R}_+^*$ telle que: $|\langle T,\varphi\rangle| \leq C_K \sum_{0\leq j\leq m} \|\varphi^{(j)}\|_{\infty}$, soit ici:

$$\lambda^{m+1} \leq C_K \sum_{j=0}^{m} \lambda^{j}\|\psi^{(j)}\|_{\infty} \leq C_K \left(\sum_{j=0}^{m}\|\psi^{(j)}\|_{\infty}\right)\lambda^{m}$$

Or, cela est impossible si $\lambda \to +\infty$ car on a: $\lambda \leq C_K\left(\sum_{j=0}^{m}\|\psi^{(j)}\|_{\infty}\right) < +\infty$.

Donc T ne peut pas être d'ordre fini.

Exercice 7

1. Comme T est une distribution à support compact, elle est d'ordre fini.

2. a. Par la formule de Leibniz :

$$\forall \ell \leq m, \quad (p_n \varphi)^{(\ell)} = \sum_{k=0}^{\ell} C_\ell^k \, p_n^{(\ell-k)} \varphi^{(k)}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Or, comme $\varphi(x) = o(x^m)$ au voisinage de 0, $\varphi^{(k)}(x) = o(x^{m-k})$, par unicité des développements limités. Par ailleurs :

$\forall x \in \mathbb{R}, \; p_n^{(\ell-k)}(x) = \frac{1}{n^{\ell-k}} p^{(\ell-k)}\left(\frac{x}{n}\right)$. Alors, pour n assez petit et $|x| \leq n$:

$$\left| p_n^{(\ell-k)}(x) \, \varphi^{(k)}(x) \right| \leq \frac{n^{m-k}}{n^{\ell-k}} \|p^{(\ell-k)}\|_\infty = n^{m-\ell} \|p^{(\ell-k)}\|_\infty \leq \varepsilon \|p^{(\ell-k)}\|_\infty .$$

Donc : $\lim\limits_{n \to 0} \sup\limits_{|x| \leq n} |(p_n \varphi)^{(\ell)}(x)| = 0.$

b. Comme T est de support $\{0\}$ et que p_n vaut 1 au voisinage de 0,

$$\forall n > 0, \quad \langle T, \varphi \rangle = \langle T, p_n \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}).$$

Comme T est d'ordre m, que $p_n \varphi$ est à support dans $[-n, n]$ et $[-n, n] \subset [-1, 1]$ (compact fixe), par a. on a :

$$\lim_{n \to 0} |\langle T, p_n \varphi \rangle| = 0 \qquad \left(|\langle T, p_n \varphi \rangle| \leq \sum_{j \leq m} C_{[-1,1]} \|p_n \varphi^{(j)}\|_\infty \right)$$

Donc : $\langle T, \varphi \rangle = \lim\limits_{n \to 0} |\langle T, p_n \varphi \rangle| = 0.$

3. Par la formule de Taylor avec reste intégral :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad \varphi(x)=\sum_{k=0}^{m}\frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}x^k+\frac{x^{m+1}}{m!}\int_0^1(1-u)^m\varphi^{(m+1)}(xu)\,du$$

En posant $\psi(x)=\frac{x^{m+1}}{m!}\int_0^1(1-u)^m\varphi^{(m+1)}(xu)\,du$,

ψ est de classe C^∞ (dérivation sous le signe $\int$) et $\psi(x)=o(x^m)$ au voisinage de 0.

4. Soit $\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Alors, par 3. il existe ψ de classe C^∞ avec $\psi(x)=o(x^m)$ au voisinage de 0 telle que :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad \varphi(x)=\sum_{k=0}^{m}\frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}x^k+\psi(x).$$

Soit ρ comme à la question 2. Alors $\rho\varphi$ est à support compact et φ et $\rho\varphi$ sont égales au voisinage 0, donc, comme $\{0\}=\operatorname{supp}T$:

$$\langle T,\varphi\rangle=\langle T,\rho\varphi\rangle=\sum_{k=0}^{m}\frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}\langle T,\rho x^k\rangle+\langle T,\rho\psi\rangle.$$

Or, $\rho\psi$ est C^∞ à support compact et $(\rho\psi)(x)=o(x^m)$ au voisinage de 0. Donc par 2., $\langle T,\rho\psi\rangle=0$.

Finalement :

$$\langle T,\varphi\rangle=\sum_{k=0}^{m}\left(\frac{1}{k!}\langle T,\rho x^k\rangle\right)\varphi^{(k)}(0)=\sum_{k=0}^{m}a_k\varphi^{(k)}(0)$$

avec $a_k=\frac{1}{k!}\langle T,\rho x^k\rangle$.

Donc, avec ces a_k : $T=\sum_{k=0}^{m}a_k\,\delta_0^{(k)}$.