École Sup Galilée — Année 2011 - 2012

Filière MACS2

Mathématiques, Théorie Générale.

Feuille de TD3 : Distributions - Dérivation

(1)

Exercice 1

1. a. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Alors : $\langle H', \varphi \rangle = -\langle H, \varphi' \rangle$

$$= -\int_0^\infty 1 \times \varphi'(x)\,dx$$

$$= -[\varphi(x)]_0^\infty + \int_0^\infty 0\,dx$$

Donc $H' = \delta_0$ $\quad = \varphi(0) = \langle \delta_0, \varphi \rangle$

b. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Alors : $\langle (\log|x|)', \varphi \rangle = -\langle \log|x|, \varphi' \rangle$

$\operatorname{supp}\varphi \subset [-A, A]$.

$$= -\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{A \geq |x| \geq \varepsilon} \log|x|\,\varphi'(x)\,dx$$

Or : $\displaystyle\int_{A \geq |x| \geq \varepsilon} \log|x|\,\varphi'(x)\,dx = -\int_{A \geq |x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx + (\log\varepsilon)[\varphi(-\varepsilon) - \varphi(\varepsilon)]$

Or, en écrivant Taylor à l'ordre 1 pour φ, on obtient :

$\varphi(\varepsilon) = \varphi(0) + \varepsilon\,\psi(\varepsilon)$ avec $\psi(\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0$

$\varphi(-\varepsilon) = \varphi(0) - \varepsilon\,\tilde{\psi}(\varepsilon)$ avec $\tilde{\psi}(\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0$

Donc : $(\log\varepsilon)[\varphi(-\varepsilon) - \varphi(\varepsilon)] = -(\varepsilon\log\varepsilon)(\psi(\varepsilon) + \tilde{\psi}(\varepsilon))$

Or $\varepsilon\log\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0$ donc $(\log\varepsilon)[\varphi(-\varepsilon) - \varphi(\varepsilon)] \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0$

et $\displaystyle\langle (\log|x|)', \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx = vp\left(\frac{1}{x}\right)$.

Donc : $(\log|x|)' = vp\left(\frac{1}{x}\right)$.

(2)

c. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\operatorname{supp}\varphi \subset [-A,A]$. Alors:

$$\langle vp(\tfrac{1}{x})', \varphi\rangle = -\langle vp(\tfrac{1}{x}), \varphi'\rangle = -\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{A\geq|x|\geq\varepsilon} \frac{\varphi'(x)}{x}\,dx$$

Or : $$-\int_{A\geq|x|\geq\varepsilon} \frac{\varphi'(x)}{x}\,dx = \left[\frac{\varphi(x)}{x}\right]_{-A}^{-\varepsilon} + \left[\frac{\varphi(x)}{x}\right]_{\varepsilon}^{A} + \int_{A\geq|x|\geq\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x^2}\,dx$$

$$= -\frac{\varphi(-\varepsilon)}{\varepsilon} - \frac{\varphi(\varepsilon)}{\varepsilon} + \int_{A\geq|x|\geq\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x^2}\,dx$$

Or, $\varphi(\varepsilon) = \varphi(0) + \varepsilon\psi(\varepsilon)$ avec $\psi(\varepsilon)\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$

$\varphi(-\varepsilon) = \varphi(0) - \varepsilon\tilde{\psi}(\varepsilon)$ avec $\tilde{\psi}(\varepsilon)\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$

Donc : $$-\frac{\varphi(\varepsilon)+\varphi(-\varepsilon)}{\varepsilon} = -2\frac{\varphi(0)}{\varepsilon} + \underbrace{[\psi(\varepsilon)+\tilde{\psi}(-\varepsilon)]}_{\downarrow \varepsilon\to 0 \atop 0}$$

D'où : $$\langle vp(\tfrac{1}{x})', \varphi\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_{|x|\geq\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x^2}\,dx - \frac{2\varphi(0)}{\varepsilon}\right] := Pf\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

2. On a, par intégrations par parties successives ; pour $\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R})$,

$\forall k\leq m$, $$\left\langle \left(\frac{x^m}{m!}H(x)\right)^{(k)}, \varphi\right\rangle = (-1)^k\left\langle \frac{x^m}{m!}H(x), \varphi^{(k)}\right\rangle$$

$$= (-1)^k\int_0^\infty \frac{x^m}{m!}\varphi^{(k)}(x)\,dx$$

$$= (-1)^k(-1)^k\int_0^\infty \frac{x^{m-k}}{(m-k)!}\varphi(x)\,dx.$$

D'où : $$\left(\frac{x^m}{m!}H(x)\right)^{(k)} = \frac{x^{m-k}}{(m-k)!}H(x).$$

Pour $k=m+1$: $\left(\frac{x^m}{m!}H(x)\right)^{(m+1)} = \delta_0$ et pour $k\geq m+2$, $\left(\frac{x^m}{m!}H(x)\right)^{(k)} = \delta^{(k-m-1)}$.

③

Exercice 2.

1. Soit $x_0 \in I$ et $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$ une primitive de f. Alors, F est C^∞ sur I. De plus, l'équation différentielle $u' + fu = g$ est équivalente à $\frac{d}{dx}(e^F u) = e^F g$ qui a pour solution C^∞,

$$u_0(x) = e^{-F(x)}\left(\int_{x_0}^{x} e^{F(t)} g(t)\,dt + C\right), \quad C \in \mathbb{R}.$$

2. Posons $T = u_0 + e^{-F} S$. Alors, on a :

$$g = T' + fT = u_0' + fu_0 + e^{-F}(S' - fS) + e^{-F} fS$$
$$= g + e^{-F} S'$$

D'où, $e^{-F} S' = 0$ et $S' = 0$. Alors S est une constante et $T = u_0 + Ce^{-F}$. Donc T est donnée par une fonction C^∞ qui vérifie l'équation au sens usuel.

Exercice 3 :

1. Comme l'équation différentielle $2xu'-u=0$ est singulière en 0, on cherche ses solutions localement intégrables sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$.

Sur $\mathbb{R}_+^*$ on trouve comme solutions : $u(x)=C_1\sqrt{x}$

Sur $\mathbb{R}_-^*$ on trouve comme solutions : $u(x)=C_2\sqrt{x}$.

On note $x_+=\max(x,0)$ et $x_-=\max(-x,0)$.

Les fonctions localement intégrables $u : x \mapsto C_1\sqrt{x_+}+C_2\sqrt{x_-}$ sont donc solutions de $2xu'-u=0$.

2.a. Les distributions associées aux fonctions $u : x\mapsto C_1\sqrt{x_+}+C_2\sqrt{x_-}$ sont solutions de $2xT'-T=0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Puis, soit $T\in\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ une solution de $2xT'-T=0$. Soit T_1 sa restriction à $C_0^\infty(\mathbb{R}_+^*)$. Soit $S_1=\frac{T_1}{\sqrt{x}}$.

Alors : $S_1' = \frac{T_1'}{\sqrt{x}} - \frac{T_1}{2x\sqrt{x}} = \frac{2xT_1'-T_1}{2x\sqrt{x}} = 0$

Comme S_1 est définie sur un intervalle (convexe), il existe $C_1\in\mathbb{R}$ telle que $S_1=C_1$. D'où $T_1=C_1\sqrt{x_+}$.

De même : $T_2=C_2\sqrt{x_-}$.

5

b. Soit $S = T - T_1 - T_2$. Si $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+^*)$, $\langle S, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle - \langle T_1, \varphi \rangle - \langle T_2, \varphi \rangle$
$= \langle T_1, \varphi \rangle - \langle T_1, \varphi \rangle - 0$
$= 0$

Et si $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}_-^*)$, $\langle S, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle - \langle T_1, \varphi \rangle - \langle T_2, \varphi \rangle$
$= \langle T_2, \varphi \rangle - 0 - \langle T_2, \varphi \rangle$
$= 0$.

Donc $\mathbb{R}_+^* \subset (\operatorname{supp} S)^c$ et $\mathbb{R}_-^* \subset (\operatorname{supp} S)^c$, donc $\operatorname{supp} S \subset \mathbb{R}_-$ et $\operatorname{supp} S \subset \mathbb{R}_+$.

Donc : $\operatorname{supp} S \subset \{0\}$.

c. Soit $R = \sum_{k=0}^{p} a_k \delta^{(k)}$, $a_k \in \mathbb{C}$. Si $R = 0$ alors $2xR' - R = 0$.

Réciproquement, supposons que $2xR' - R = 0$ et montrons que $R = 0$.
Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ et $k \geq 1$:

$$\langle 2x(\delta^{(k)})', \varphi \rangle = -\langle \delta^{(k)}, (2x\varphi)' \rangle$$
$$= -\langle \delta^{(k)}, 2\varphi \rangle - \langle \delta^{(k)}, 2x\varphi' \rangle$$
$$= 2(-1)^{k+1} (2\varphi^{(k)}(0) + (2x\varphi')^{(k)}(0))$$
$$= 2(-1)^{k+1} (k+1) \varphi^{(k)}(0)$$

Donc $2xR' - R = \sum_{k=0}^{p} (2(-1)^{k+1}(k+1) - 1) a_k \delta^{(k)}$

Or $2xR' - R = 0$, donc $a_k = 0$ pour tout k et $R = 0$.

d. Comme par b., $\operatorname{supp} S \subset \{0\}$, S s'écrit $S = \sum_{k=0}^{p} a_k \delta^{(k)}$.

Si T est solution de $2xT' - T = 0$, alors S aussi et donc par c., $S = 0$.

Ainsi, $T = T_1 + T_2 = C_1 \sqrt{x_+} + C_2 \sqrt{x_-}$ ~~sont~~ les solutions de $2xT' - T = 0$.

2. La forme du second membre δ_0 nous incite à chercher une solution particulière qui soit combinaison linéaire de dérivées de masses de Dirac en 0. Or, par c., il suffit de prendre une masse de Dirac en 0 et en injectant cette distribution $a_0 \delta_0$ dans l'équation, on en tire : $(2(-1)(1) - 1) a_0 = 1$ soit $a_0 = -\frac{1}{3}$.

Donc les solutions de l'équation différentielle $2xT'-T=\delta_0$ sont les

$$C_1\sqrt{x_+}+C_2\sqrt{x_-}-\frac{1}{3}\delta_0 .$$

3. On note $T_0 = C_1\sqrt{x_+}+C_2\sqrt{x_-}-\frac{1}{3}\delta_0$. Soit $f\in\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Alors $T_0 * f$ est solution de $2xT'-T=f$.

En effet : $2x(T_0*f)'-T_0*f = 2x\,T_0'*f-T_0*f=(2xT_0'-T_0)*f=\delta_0*f$
$=f$.

Et $T_0*f = C_1\sqrt{x_+}*f + C_2\sqrt{x_-}*f-\frac{1}{3}f$

convolution des fonctions

⑦ Exercice 4

1. Soit K un compact de $\mathbb{R}^2$ et $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, $\operatorname{supp}\varphi \subset K$.

Posons $K_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid (x, h(x)) \in K\}$ qui est compact car K l'est et h est un C^1-difféo.

Alors : $|\langle T, \varphi\rangle| \leq \left(\int_{K_1} dx\right) \sup_{(x,y)\in K} |\varphi(x,y)| \leq C \|\varphi\|_\infty$.

Donc T est une distribution d'ordre au plus 0 donc d'ordre 0 sur $\mathbb{R}^2$.

2. Soit D la courbe $D = \{(x, h(x)) \mid x \in \mathbb{R}\}$. Montrons que $\operatorname{supp} T = D$.

Tout d'abord, soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, $\operatorname{supp}\varphi \subset \mathbb{R}^2 \setminus D$. Alors $\varphi(x, h(x)) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $\langle T, \varphi\rangle = 0$. Donc $D^c \subset (\operatorname{supp} T)^c$ et $\operatorname{supp} T \subset D$.

Réciproquement, montrons que tout point $M_0 = (x_0, h(x_0)) \in D$ est dans $\operatorname{supp} T$.

Soit $\delta > 0$. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ une fonction positive, avec $\operatorname{supp}\varphi \subset B(M_0, \delta)$ et $\varphi(x,y) = 1$ pour tout $(x,y) \in B(M_0, \delta/2)$. Soit $K_\delta = \{x \in \mathbb{R} \mid (x, h(x)) \in B(M_0, \delta)\}$.

$$|\langle T, \varphi\rangle| = \left|\int_{K_\delta} \varphi(x, h(x))\, dx\right| \geq \int_{K_{\delta/2}} \underbrace{\varphi(x, h(x))}_{=1} dx$$
$$\geq Leb(K_{\delta/2}) > 0$$

où $K_{\delta/2} = \{x \in \mathbb{R} \mid (x, h(x)) \in B(M_0, \delta/2)\}$ est de mesure de Lebesgue strictement positive. Donc T est non nulle au voisinage de M_0, donc $M_0 \in \operatorname{supp} T$.

Ainsi $D \subset \operatorname{supp} T$ et $D = \operatorname{supp} T$.

3. Si T est la distribution T_f associée à une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$ f, alors $\operatorname{supp} T = \operatorname{supp} f$ où $\operatorname{supp} f$ est le support de f au sens des fonctions continues. Alors, f serait nulle en dehors de D qui est de mesure nulle dans $\mathbb{R}^2$, donc T_f serait nulle. Or T est non nulle.

4. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$. Soit $\phi(x) = \varphi(x, h(x))$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Alors : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\phi'(x) = \dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(x, h(x)) + h'(x)\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}(x, h(x))$

D'où : $\langle \partial_x T + h'(x)\partial_y T, \varphi\rangle = -\int_{\mathbb{R}} (\partial_x \varphi + h'(x)\partial_y\varphi)(x, h(x))\, dx = -\int_{\mathbb{R}} \phi'(x)\, dx$

$= [\phi(x)]_{-\infty}^{+\infty} = 0$ car ϕ est à support compact.

Donc : $(\partial_x + h'(x)\partial_y) T = 0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$.

Exercice 5 - Equation de la chaleur

1. On a, $\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2$, $0 \leq E(x,t) \leq \frac{H(t)}{\sqrt{4\pi t}} \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$.

Donc $E \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$ et E définit une distribution sur $\mathbb{R}^2$.

2. Soient $t>0$ et $x \in \mathbb{R}$:

On a :
$$\partial_t \left(\frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \right) = -\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \frac{1}{t^{3/2}} e^{-\frac{x^2}{4t}} + \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \frac{x^2}{4t^2} e^{-\frac{x^2}{4t}}$$
$$= \left[-\frac{1}{4\sqrt{\pi}\, t^{3/2}} + \frac{x^2}{8\sqrt{\pi}\, t^{5/2}} \right] e^{-\frac{x^2}{4t}}$$

et
$$\partial^2_{xx} \left(\frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \right) = \partial_x \left(\frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \left(-\frac{2x}{4t} \right) e^{-\frac{x^2}{4t}} \right) = -\partial_x \left(\frac{x}{4\sqrt{\pi}\, t^{3/2}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \right)$$
$$= -\frac{1}{4\sqrt{\pi}\, t^{3/2}} e^{-\frac{x^2}{4t}} - \frac{x}{4\sqrt{\pi}\, t^{3/2}} \left(-\frac{x}{2t} \right) e^{-\frac{x^2}{4t}}$$
$$= \left[-\frac{1}{4\sqrt{\pi}\, t^{3/2}} + \frac{x^2}{8\sqrt{\pi}\, t^{5/2}} \right] e^{-\frac{x^2}{4t}}$$
$$= \partial_t \left(\frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \right)$$

3. a. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $\varphi \in C^\infty_0(\mathbb{R}^2)$.

On a :
$$I_\varepsilon = -\int_{\mathbb{R}} \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}} \partial_t \varphi(x,t)\, dt\, dx$$

IPP $\rightarrow$
$$= -\int_{\mathbb{R}} -\frac{1}{\sqrt{4\pi\varepsilon}} e^{-\frac{x^2}{4\varepsilon}} \varphi(x,\varepsilon)\, dx + \int_{\mathbb{R}} \int_\varepsilon^{+\infty} \partial_t \left(\frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}} \right) \varphi(x,t)\, dt\, dx$$

par 2. $\rightarrow$
$$= \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-\frac{x^2}{4\varepsilon}}}{\sqrt{4\pi\varepsilon}} \varphi(x,\varepsilon)\, dx + \int_{\mathbb{R}} \int_\varepsilon^{+\infty} \partial^2_{xx} \left(\frac{e^{-x^2/4t}}{\sqrt{4\pi t}} \right) \varphi(x,t)\, dt\, dx$$

$2 \times$ IPP + Fubini $\rightarrow$
$$= \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-\frac{x^2}{4\varepsilon}}}{\sqrt{4\pi\varepsilon}} \varphi(x,\varepsilon)\, dx + \int_{\mathbb{R}} \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-x^2/4t}}{\sqrt{4\pi t}} \partial^2_{xx} \varphi(x,t)\, dt\, dx$$
$$= \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-\frac{x^2}{4\varepsilon}}}{\sqrt{4\pi\varepsilon}} \varphi(x,\varepsilon)\, dx - J_\varepsilon .$$

Donc :
$$I_\varepsilon + J_\varepsilon = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-\frac{x^2}{4\varepsilon}}}{\sqrt{4\pi\varepsilon}} \varphi(x,\varepsilon)\, dx.$$

(9)

b. On pose $y = \frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}$, $dx = \sqrt{\varepsilon}\, dy$.

Alors : $I_\varepsilon + J_\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2/4} \varphi(\sqrt{\varepsilon} y, \varepsilon)\, dy$

Or, par convergence dominée, comme $e^{-y^2/4}\varphi(\sqrt{\varepsilon}y,\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} e^{-y^2/4}\varphi(0,0)$,

et $|e^{-y^2/4}\varphi(\sqrt{\varepsilon}y,\varepsilon)| \leq \|\varphi\|_\infty e^{-y^2/4} \in L^1(\mathbb{R})$, on a :

$$\lim_{\varepsilon\to 0} I_\varepsilon + J_\varepsilon = \frac{\varphi(0,0)}{\sqrt{4\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2/4}\, dy = \varphi(0,0).$$

4. On a, pour $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$:

$$\langle (\partial_t - \partial^2_{xx})E, \varphi\rangle = -\langle E, \partial_t\varphi + \partial^2_{xx}\varphi\rangle$$

$$= -\int_{\mathbb{R}^2} \frac{H(t)}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \left(\partial_t\varphi(x,t) + \partial^2_{xx}\varphi(x,t)\right) dx\, dt$$

$$= -\int_{\mathbb{R}\times]0,+\infty[} \frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}} \left(\partial_t\varphi(x,t) + \partial^2_{xx}\varphi(x,t)\right) dx\, dt$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(I_\varepsilon + J_\varepsilon\right) = \varphi(0,0) = \langle \delta_0, \varphi\rangle.$$

par convergence dominée. En effet :

$$\left|\frac{H(t)}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \partial_t\varphi(x,t)\right| \leq \frac{\partial_t\varphi(x,t)}{\sqrt{4\pi t}} H(t) \in L^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+)$$

et quand $\varepsilon \to 0$, $\mathbb{1}_{[\varepsilon,+\infty[}(t) \frac{H(t)}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \partial_t\varphi(x,t) \longrightarrow \frac{H(t)}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \partial_t\varphi(x,t)$

et donc $I_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} -\int_{\mathbb{R}^2} \frac{H(t)}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \partial_t\varphi(x,t)\, dx\, dt$.

De même : $J_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} -\int_{\mathbb{R}^2} \frac{H(t)}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \partial^2_{xx}\varphi(x,t)\, dx\, dt$.

Donc, dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$, $\boxed{(\partial_t - \partial^2_{xx})E = \delta_0}$

5. Comme $\{\operatorname{supp} E, \operatorname{supp} f\}$ est convolutive, $E * f$ converge.

6. Comme $E \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$, si $f \in C_0^\infty(\Omega)$ alors $u \in C^\infty(\Omega)$ avec $u = E * f$.

⑩

Exercice 6 - Equation de Cauchy-Riemann.

1. On a : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, $|f(x,y)| = \frac{1}{|x+iy|} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$.

car dans $\mathbb{R}^n$, $\frac{1}{\|x\|^\alpha}$ est intégrable en 0 si $\alpha < n$ (se voit en passant en coordonnées polaires).

2. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$. On a :

$$\begin{aligned}
\langle \bar\partial f, \varphi \rangle &= \tfrac{1}{2} \langle \partial_x f, \varphi \rangle + \tfrac{i}{2} \langle \partial_y f, \varphi \rangle \\
&= -\tfrac{1}{2} \langle f, \partial_x \varphi \rangle - \tfrac{i}{2} \langle f, \partial_y \varphi \rangle \\
&= -\tfrac{1}{2} \langle f, \partial_x \varphi + i \partial_y \varphi \rangle \\
&= -\tfrac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{x+iy} (\partial_x \varphi + i \partial_y \varphi)(x,y)\, dx\, dy.
\end{aligned}$$

$\times \frac{x-iy}{x-iy}$ dans $\int \rightarrow$ $= -\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{x^2+y^2} (x \partial_x \varphi + y \partial_y \varphi)(x,y)\, dx\, dy - \frac{1}{2} i \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{x^2+y^2} (x \partial_y \varphi - y \partial_x \varphi)\, dx\, dy$

en posant $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \rightarrow$ $= -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi}\int_{\mathbb{R}^+} \frac{1}{r^2}\, r \partial_r \tilde\varphi(r,\theta) \times r\, dr\, d\theta - \frac{1}{2} i \int_0^{2\pi}\int_{\mathbb{R}^+} \frac{1}{r^2} (\partial_\theta \tilde\varphi(r,\theta))\, r\, dr\, d\theta$

et $\tilde\varphi(r,\theta) = \varphi(r\cos\theta, r\sin\theta)$

car $\partial_r \tilde\varphi(r,\theta) = \partial_r \varphi(r\cos\theta, r\sin\theta) = \cos\theta\, \partial_x \varphi + \sin\theta\, \partial_y \varphi$
$= \frac{1}{r} (x \partial_x \varphi + y \partial_y \varphi)$

et $\partial_\theta \tilde\varphi(r,\theta) = \partial_\theta \varphi(r\cos\theta, r\sin\theta) = -r\sin\theta\, \partial_x \varphi + r\cos\theta\, \partial_y \varphi$
$= x \partial_y \varphi - y \partial_x \varphi$

Soit $\varepsilon > 0$: $\langle \bar\partial f, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \left[-\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_\varepsilon^{+\infty} \partial_r \tilde\varphi(r,\theta)\, dr\, d\theta - \frac{1}{2} i \cdot \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{1}{r} \int_0^{2\pi} \partial_\theta \tilde\varphi(r,\theta)\, d\theta\, dr \right]$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \tilde\varphi(\varepsilon,\theta)\, d\theta - \frac{1}{2} i \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{1}{r} \underbrace{(\tilde\varphi(r,2\pi) - \tilde\varphi(r,0))}_{0}\, dr \right]$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \tilde\varphi(\varepsilon,\theta)\, d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \varphi(0,0)\, d\theta = \pi \varphi(0,0).$$

par convergence dominée car $|\tilde\varphi(\varepsilon,\theta)| \leq M$ est intégrable sur $[0,2\pi]$ et $\tilde\varphi(\varepsilon,\theta) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \varphi(0,0)$.

D'où $\langle \bar\partial f, \varphi \rangle = \pi \varphi(0,0) = \langle \pi \delta_0, \varphi \rangle$ i.e. $\bar\partial f = \pi \delta_0$.