École Sup Galilée

Filière MACS 2

Mathématiques, Théorie Générale

2011 - 2012

(1)

Feuille de TD 4 : Distributions - Suites et convolution

Exercice 1

(i) Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\operatorname{supp} \varphi \subset [-A, A]$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\langle A_n, \varphi \rangle = \int_{-A}^{A} \sin(nx)\,\varphi(x)\,dx$$

$$= \underbrace{\left[-\frac{\cos(nx)}{n}\varphi(x) \right]_{-A}^{A}}_{=0} + \int_{-A}^{A} \frac{\cos(nx)}{n}\varphi'(x)\,dx$$

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|\langle A_n, \varphi \rangle| \leq \frac{1}{n} \int_{-A}^{A} |\varphi'(x)|\,dx \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

Donc $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0 dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

(ii) Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\operatorname{supp} \varphi \subset [-A, A]$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\langle B_n, \varphi \rangle = \int_{-A}^{A} n\, g(nx)\,\varphi(x)\,dx \underset{u = nx}{=} \int_{-nA}^{nA} g(u)\,\varphi\left(\frac{u}{n}\right) du$$

$$= \int_{\mathbb{R}} g(u)\,\varphi\left(\frac{u}{n}\right) \mathbb{1}_{[-nA, nA]}(u)\,du.$$

Or : $g(u)\varphi\left(\frac{u}{n}\right) \mathbb{1}_{[-nA,nA]}(u) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} g(u)\varphi(0)$, $\forall u \in \mathbb{R}$.

et : $\left| g(u)\varphi\left(\frac{u}{n}\right) \mathbb{1}_{[-nA,nA]}(u) \right| \leq |g(u)|\,\|\varphi\|_\infty \in L^1(\mathbb{R})$

②

Donc, par le théorème de convergence dominée :

$$\langle B_n, \varphi \rangle \xrightarrow[n \to +\infty]{} \varphi(0) \int_{\mathbb{R}} g(u)\,du$$

Donc $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\left(\int_{\mathbb{R}} g(u)\,du\right) \delta_0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

(iii) Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Alors:

$$\langle C_n, \varphi \rangle = \frac{1}{n} \sum_{p=0}^{n-1} \varphi\left(\frac{p}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{somme de Riemann}} \int_0^1 \varphi(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \mathbb{1}_{[0,1]}(x)\,dx.$$

Donc $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la distribution associée à $\mathbb{1}_{[0,1]}$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

(iv) Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\operatorname{supp}\varphi \subset [-A, A]$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\langle D_n, \varphi \rangle = \langle e^{inx}\, vp\left(\tfrac{1}{x}\right), \varphi \rangle = \langle vp\left(\tfrac{1}{x}\right), e^{inx}\varphi \rangle$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x|>\varepsilon} \frac{e^{inx}\varphi(x)}{x}\,dx$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \left[\int_{A\geq|x|>\varepsilon} \cos(nx) \frac{\varphi(x)}{x}\,dx + i \int_{A\geq|x|>\varepsilon} \sin(nx) \frac{\varphi(x)}{x}\,dx \right]$$

Pour la partie réelle :

On écrit $\varphi(x) = \varphi(0) + x\psi(x)$, $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\operatorname{supp}\psi \subset [-A, A]$.

On a: $$\int_{A\geq|x|>\varepsilon} \cos(nx)\frac{\varphi(x)}{x}\,dx = \varphi(0) \underbrace{\int_{A\geq|x|>\varepsilon} \frac{\cos(nx)}{x}\,dx}_{=0 \text{ par imparité}} + \int_{A\geq|x|>\varepsilon} \cos(nx)\psi(x)\,dx$$

Donc: $$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{A\geq|x|>\varepsilon} \cos(nx) \frac{\varphi(x)}{x}\,dx = \int_{-A}^{A} \cos(nx)\psi(x)\,dx \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Pour la partie imaginaire : $$\int_{A\geq|x|>\varepsilon} \sin(nx)\frac{\varphi(x)}{x}\,dx = \varphi(0) \int_{A\geq|x|>\varepsilon} \frac{\sin(nx)}{x}\,dx + \int_{A\geq|x|>\varepsilon} \psi(x)\sin(nx)\,dx$$

Donc: $$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{A\geq|x|>\varepsilon} \sin(nx)\frac{\varphi(x)}{x}\,dx = \varphi(0) \underbrace{\int_{-A}^{A} \frac{\sin(nx)}{x}\,dx}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} \pi} + \underbrace{\int_{-A}^{A} \sin(nx)\psi(x)\,dx}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \pi\varphi(0) + 0$$

Donc $\langle D_n, \varphi \rangle \xrightarrow[n\to+\infty]{} i\pi\varphi(0)$ et $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $i\pi\delta_0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

③ Exercice 2 :

1. Soit $t \not\equiv 0\,[2\pi]$. Alors : $\displaystyle\sum_{k=-N}^{N} e^{ikt} = e^{-iNt} + \dots + 1 + \dots + e^{iNt}$

$$= e^{-iNt}\left[1 + \dots + e^{2iNt}\right]$$

$$= e^{-iNt}\,\frac{e^{i(2N+1)t} - 1}{e^{it} - 1}$$

$$= \underbrace{e^{-iNt}\,e^{i\left(\frac{2N+1}{2}\right)t}\,e^{-i\frac{t}{2}}}_{=1}\;\frac{e^{i\left(\frac{2N+1}{2}\right)t} - e^{-i\left(\frac{2N+1}{2}\right)t}}{e^{i\frac{t}{2}} - e^{-i\frac{t}{2}}}$$

$$= \frac{\sin\left(\frac{2N+1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}}$$

Donc : $\forall t \in \mathbb{R}\setminus 2\pi\mathbb{Z},\; F_N(t) = \dfrac{1}{2\pi}\,\dfrac{\sin\left(\frac{2N+1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}}$.

2. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\operatorname{supp}\varphi \subset [-(2M+1)\pi, (2M+1)\pi]$. Alors, pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$\langle T_N, \varphi\rangle = \int_{-(2M+1)\pi}^{(2M+1)\pi} F_N(t)\varphi(t)\,dt = \sum_{m=-M}^{M} \int_{2m\pi-\pi}^{2m\pi+\pi} F_N(t)\varphi(t)\,dt$$

$$\overset{u=t+2m\pi}{=} \sum_{m=-M}^{M} \int_{-\pi}^{\pi} F_N(u)\,\varphi(u-2m\pi)\,du$$

par 2π périodicité de F_N

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin\left(\frac{2N+1}{2}\right)u}{\sin\frac{u}{2}} \underbrace{\sum_{m=-M}^{M} \varphi(u-2m\pi)}_{=\phi(u)}\,du$$

3. On écrit $\phi(t) = \phi(0) + t\psi(t)$, $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$. D'où :

$$\forall N \in \mathbb{N},\quad \langle T_N, \varphi\rangle = \frac{1}{2\pi}\phi(0)\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin\left(\frac{2N+1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}}\,dt + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{t}{\sin\frac{t}{2}}\psi(t)\sin\left(\frac{2N+1}{2}\right)t\,dt$$

Or, $t \mapsto \frac{t}{\sin\frac{t}{2}}\psi(t) \in L^1([-\pi,\pi])$, donc par Riemann-Lebesgue la seconde intégrale tend vers 0 lorsque N tend vers l'infini.

D'autre part :

$$\frac{\phi(0)}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin\left(\frac{2N+1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}}\,dt = \phi(0)\int_{-\pi}^{\pi} F_N(t)\,dt = \frac{\phi(0)}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{k=-N}^{N} e^{ikt}\,dt$$

$$= \frac{\phi(0)}{2\pi}\times 2\pi = \phi(0)$$

Donc : $\langle T_N, \varphi\rangle \xrightarrow[N\to+\infty]{} \phi(0) = \sum_{k=-M}^{M} \varphi(2k\pi) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi(2k\pi)$

$$= \left\langle \sum_{m\in\mathbb{Z}} \delta_{2\pi m}, \varphi\right\rangle.$$

Donc $(T_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge vers $\sum_{m\in\mathbb{Z}} \delta_{2\pi m}$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

On en déduit la formule de Poisson :

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}} e^{imx} = 2\pi\sum_{m\in\mathbb{Z}} \delta_{2\pi m}.$$

Exercice 3

Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. On écrit : $\varphi(x) = \varphi(0) + x\,\psi(x)$ avec $\psi(x) = \int_0^1 \varphi'(xu)\,du$

Alors : $\forall n \in \mathbb{N}, \langle T_n, \varphi \rangle = n\left(\varphi\left(\frac{1}{n}\right) - \varphi\left(-\frac{1}{n}\right)\right)$

$$= n\left(\varphi(0) + \frac{1}{n}\psi\left(\frac{1}{n}\right) - \left(\varphi(0) - \frac{1}{n}\psi\left(-\frac{1}{n}\right)\right)\right)$$

$$= \psi\left(\frac{1}{n}\right) + \psi\left(-\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2\psi(0) = 2\int_0^1 \varphi'(0)\,du$$

$$= 2\varphi'(0)$$

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}, \langle T_n, \varphi \rangle \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2\varphi'(0) = \langle 2\delta_0', \varphi \rangle$

Donc $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $2\delta_0'$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Or, pour tout n, T_n est d'ordre 0 et $2\delta_0'$ est d'ordre 1. En général, il n'y a pas de lien entre l'ordre des éléments de la suite et l'ordre de la limite.

6

Exercice 4 :

1. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. On a : $\langle \delta_0' * \delta_0', \varphi \rangle = \langle \delta_0' \otimes \delta_0', \varphi^\Delta(x,y) \rangle$

$$= \langle \delta_0', -\langle \delta_0, \partial_y \varphi^\Delta(x,y) \rangle \rangle$$

où $\varphi^\Delta(x,y) = \varphi(x+y)$.

$$= \langle \delta_0', -\varphi'(x) \rangle$$

$$= \varphi''(0).$$

Donc $\delta_0' * \delta_0' = \delta_0''$.

On peut aussi dériver l'égalité : $\delta_0 * \delta_0 = \delta_0$, deux fois.

2. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on note φ_x la fonction de $C_0^\infty(\mathbb{R})$ définie par $\varphi_x(y) = \varphi(x,y)$. On a :

$$\langle \delta_a' \otimes \delta_b', \varphi \rangle = \langle \delta_a', \langle \delta_b', \varphi_x \rangle \rangle = \langle \delta_a', -\varphi_x'(b) \rangle$$

$$= \langle \delta_a', -\partial_y \varphi(x,b) \rangle = \partial_x \partial_y \varphi(a,b).$$

3. $E = \delta_0^{(k)}$ convient. En effet si on dérive k fois l'identité $\delta_0 * T = T$ on obtient

$$\delta_0^{(k)} * T = T^{(k)}.$$

4. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. On a :

$$\langle X^m(T*S), \varphi \rangle = \langle T*S, X^m \varphi \rangle = \langle T \otimes S, (x+y)^m \varphi^\Delta(x,y) \rangle$$

où $\varphi^\Delta(x,y) = \varphi(x+y)$

$$= \sum_{k=0}^{m} C_m^k \langle T \otimes S, x^k y^{m-k} \varphi^\Delta(x,y) \rangle$$

$$= \sum_{k=0}^{m} C_m^k \langle (x^k T) \otimes (y^{m-k} S), \varphi^\Delta(x,y) \rangle = \langle \sum_{k=0}^{m} C_m^k (X^k T) * (X^{m-k} S), \varphi \rangle$$

(7) Exercice 5 :

1. a. Comme φ est à support compact, il existe $a>0$ tel que $\text{supp}\,\varphi \subset [-a,a]$.

Alors, si $\chi(x)\chi(y)\varphi(x+y) \neq 0$, on a $x \geq -1$, $y \geq -1$ et $x+y \leq a$.

D'où : $x \in [-1, a+1]$ et $y \in [-1, a+1]$. Ainsi :

$$\text{supp}\,(\varphi^\Delta) \subset [-1,a+1]^2 \quad \text{et} \quad \varphi^\Delta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2).$$

b. Par a., la distribution $T*S$ est bien définie. Soit χ_1 une autre fonction vérifiant les mêmes hypothèses que χ. On a :

$$\langle T_x \otimes S_y, \varphi^\Delta(x,y)\rangle - \langle T_x \otimes S_y, \chi_1(x)\chi_1(y)\varphi(x+y)\rangle = \langle T_x \otimes S_y, (\chi(x)-\chi_1(x))\chi(y)\varphi(x+y)\rangle$$
$$+ \langle T_x \otimes S_y, \chi_1(x)(\chi(y)-\chi_1(y))\varphi(x+y)\rangle$$

Or, $\text{supp}(\chi-\chi_1) \subset]-\infty, -\frac{1}{2}]$ donc $(\text{supp}\,T) \cap \text{supp}(\chi-\chi_1) = \emptyset$, ce qui implique que le premier crochet est nul. Puis, comme $(\text{supp}\,S) \cap \text{supp}(\chi-\chi_1) = \emptyset$, le second crochet est lui aussi nul. Ainsi :

$$\langle T_x \otimes S_y, \varphi^\Delta\rangle = \langle T_x \otimes S_y, \underbrace{\varphi_1^\Delta}_{\text{correspondant à } \chi_1}\rangle$$ et $T*S$ ne dépend pas du choix de χ.

c. Soit $\delta \in]0, \frac{1}{2}[$ et soit $\chi_\delta \equiv 1$ sur $]-\delta, +\infty[$ et $\chi_\delta \equiv 0$ sur $]-\infty, -2\delta[$.

D'après b., on a :

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}), \quad \langle T*S, \varphi\rangle = \langle T_x \otimes S_y, \varphi(x+y)\chi_\delta(x)\chi_\delta(y)\rangle.$$

On choisit φ à support dans $]-\infty, 0[$. Alors, il existe $a>0$ tel que $\text{supp}\,\varphi \subset]-\infty, -a[$. Ainsi, $(x,y) \mapsto \chi_\delta(x)\chi_\delta(y)\varphi(x+y)$ est non nulle uniquement si $x+y \leq -a$, $x \geq -2\delta$, $y \geq -2\delta$ soit encore $x \leq -a+2\delta$ et $y \leq -a+2\delta$. Mais, pour δ assez petit, $-a+2\delta<0$ et comme $\text{supp}\,T \subset [0,+\infty[$ et $\text{supp}\,S \subset [0,+\infty[$, on obtient : $\langle T*S, \varphi\rangle = 0$. Donc : $\text{supp}(T*S) \subset [0, +\infty[$.

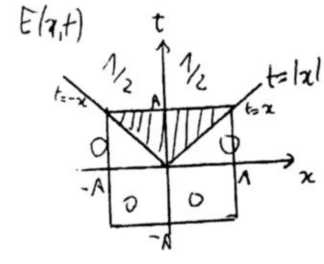
2. a. Soit H la distribution de Heaviside, i.e. la fonction indicatrice de $]0,+\infty[$. Alors $H \in \mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$ et

$$H * \delta_0' = H' * \delta_0 = \delta_0 * \delta_0 = \delta_0 .$$

Donc H est l'inverse de δ_0' dans $\mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$.

b. Supposons par l'absurde qu'il existe $S \in \mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$ telle que $T * S = \delta_0$. Comme $T \in C_0^\infty$, on devrait avoir que $T * S$ est la distribution associée à une fonction C^∞. Or δ_0 ne l'est pas. Contradiction et résultat : si $T \in C_0^\infty(]0,+\infty[)$, T n'est pas inversible dans $\mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$.

Exercice 6 :



1. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, $\operatorname{supp}\varphi \subset [-A,A]^2$, $A>0$. On a :

$$\langle (\partial_{tt}^2 - \partial_{xx}^2) E , \varphi \rangle = \langle E, (\partial_{tt}^2 - \partial_{xx}^2)\varphi \rangle$$

Par Fubini

$$\overset{\nearrow}{=} \frac{1}{2}\left[\int_0^A \int_x^A \partial_{tt}^2 \varphi(x,t)\, dt\, dx + \int_{-A}^0 \int_{-x}^A \partial_{tt}^2 \varphi(x,t)\, dt\, dx - \int_0^A \int_{-t}^t \partial_{xx}^2 \varphi(x,t)\, dx\, dt \right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_0^A -\partial_t \varphi(x,x)\, dx + \int_{-A}^0 -\partial_t \varphi(x,-x)\, dx - \int_0^A \partial_x \varphi(t,t) - \partial_x \varphi(-t,t)\, dt \right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\int_0^A \partial_t \varphi(u,u)\, du - \int_0^A \partial_x \varphi(u,u)\, du - \int_0^A \partial_t \varphi(-u,u)\, du + \int_0^A \partial_x \varphi(-u,u)\, du \right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\int_0^A \phi_1'(u)\, du - \int_0^A \phi_2'(u)\, du \right] \text{ où } \phi_1(u) = \varphi(u,u) \text{ et } \phi_2(u) = \varphi(-u,u)$$

$$= \frac{1}{2}\left[\phi_1(0) + \phi_2(0) \right] = \varphi(0,0) = \langle \delta_0 , \varphi \rangle .$$

Donc, dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$, $(\partial_{tt}^2 - \partial_{xx}^2) E = \delta_0$.

2. Si $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ est à support compact, $\{\operatorname{supp} E, \operatorname{supp} f\}$ est une paire convolutive et on a :

$$(\partial_{tt}^2 - \partial_{xx}^2)(E * f) = (\partial_{tt}^2 E - \partial_{xx}^2 E) * f = \delta_0 * f = f.$$

Donc $u = E*f$ est solution dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ de $\partial_{tt}^2 u - \partial_{xx}^2 u = f$.

3. Comme E est C^∞ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(t,x) \in \mathbb{R}^2,\ t = |x|\}$, et que $\{(t,x) \in \mathbb{R}^2 \mid t = |x|\}$ est de mesure nulle, si $f \in C_0^\infty(\Omega)$, Ω ouvert de $\mathbb{R}^2$, alors $E*f$ est C^∞ sur Ω.

Donc $u \in C^\infty(\Omega)$.

(10) <u>Exercice 7 - Equation de Laplace</u>

1. Pour $d=1$ et $x\in\mathbb{R}$, on écrit $E(x)=x_+ = x\,H(x)$.
Alors $(x\,H(x))' = H(x) + \underbrace{x\,\delta_0}_{=0}$ et $(x\,H(x))'' = H'(x) = \delta_0$.
Donc $E'' = \delta_0$.

2. On suppose $d\geq 2$. Soit $j\in\{1,\dots,d\}$. On a, pour tout $x\in\mathbb{R}^d\setminus\{0\}$,
$$\partial_j F(x) = \partial_j(|x|)\, f'(|x|) = \frac{x_j}{|x|} f'(|x|).$$
et
$$\partial^2_{jj} F(x) = \frac{x_j}{|x|}\times\partial_j(|x|) f''(|x|) + \partial_j\left(\frac{x_j}{|x|}\right) f'(|x|)$$
$$= \frac{x_j^2}{|x|^2} f''(|x|) + \left(\frac{1}{|x|} - \frac{x_j^2}{|x|^3}\right) f'(|x|)$$
D'où :
$$\Delta F(x) = \sum_{j=1}^d \partial^2_{jj} F(x) = \frac{\sum_{j=1}^d x_j^2}{|x|^2} f''(|x|) + \left(\sum_{j=1}^d \frac{1}{|x|}\right) f'(|x|) - \frac{\sum_{j=1}^d x_j^2}{|x|^3} f'(|x|)$$
$$= \frac{|x|^2}{|x|^2} f''(|x|) + \frac{d}{|x|} f'(|x|) - \frac{|x|^2}{|x|^3} f'(|x|)$$
$$= f''(|x|) + \frac{d-1}{|x|} f'(|x|).$$

3. On résout, sur $\mathbb{R}_+^*$, l'équation différentielle linéaire : $f''(r) + \frac{d-1}{r} f'(r) = 0$.

Si $d=2$, on obtient $f(r) = a + b\log r$, $a,b\in\mathbb{R}$.

Si $d\geqslant 3$, on obtient $f(r) = a + \frac{b}{r^{d-2}}$, $a,b\in\mathbb{R}$.

4. Pour F comme dans l'énoncé et $\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$,

$$\langle \Delta F,\varphi\rangle = \langle F,\Delta\varphi\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{|x|>\varepsilon} F(x)(\Delta\varphi)(x)\,dx.$$

On fixe $\varepsilon>0$. Par la formule de Green, on a :

$$\int_{\Omega_\varepsilon} (\Delta F)(x)\varphi(x) - F(x)(\Delta\varphi)(x)\,dx = \int_{\partial\Omega_\varepsilon}\vec{N}\cdot\Big(\underbrace{\frac{\partial F}{\partial n}}_{\nabla F(x)}(x)\varphi(x) - \underbrace{\frac{\partial\varphi}{\partial n}}_{\nabla\varphi(x)}(x)F(x)\Big)d\sigma(x)$$

normale sortante : $\vec{N} = -\frac{x}{|x|}$

D'où : $$\int_{|x|>\varepsilon} F(x)(\Delta\varphi)(x)\,dx = \cancel{\underbrace{\int_{|x|>\varepsilon}(\Delta F)(x)\varphi(x)\,dx}_{=0 \text{ par } 3.}} + \int_{|x|=\varepsilon}\frac{x}{|x|}\cdot\Big(\underbrace{\frac{\partial F}{\partial n}}_{\nabla F(x)}(x)\varphi(x) - \underbrace{\frac{\partial\varphi}{\partial n}}_{\nabla\varphi(x)}(x)F(x)\Big)d\sigma(x)$$

- On a aussi : $$\int_{|x|=\varepsilon} -\frac{x}{|x|}\cdot F(x)\underbrace{\frac{\partial\varphi}{\partial n}}_{\nabla\varphi(x)}(x)\,d\sigma(x) = \int_{\omega\in S^{d-1}} F(\varepsilon\omega)\big(-\nabla\varphi(\varepsilon\omega)\cdot\underbrace{\omega}_{x/|x|}\big)\varepsilon^{d-1}\,d\omega$$

Or : $F(\varepsilon\omega) = \begin{cases}\log\varepsilon & \text{si } d=2\\ \frac{1}{\varepsilon^{d-2}} & \text{si } d\geqslant 3\end{cases}$

Donc $$\int_{|x|=\varepsilon} -\frac{x}{|x|}\cdot F(x)\underbrace{\frac{\partial\varphi}{\partial n}}_{\nabla\varphi(x)}(x)\,d\sigma(x) \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0$$ car $\varepsilon\log\varepsilon \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0$ et $\varepsilon\underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0$.

- On a encore :

$$\int_{|x|=\varepsilon}\frac{x}{|x|}\varphi(x)\underbrace{\frac{\partial F}{\partial n}}_{\nabla F(x)}(x)\,d\sigma(x) = \int_{\omega\in S^{d-1}}\varphi(\varepsilon\omega)\underbrace{\nabla F(\varepsilon\omega)\cdot\omega}_{\frac{\partial f}{\partial r}(\varepsilon)}\varepsilon^{d-1}\,d\omega$$

avec $f(r) = \begin{cases}\log r & \text{si } d=2\\ \frac{1}{r^{d-2}} & \text{si } d\geqslant 3\end{cases}$

Donc : si $d=2$: $$\int_{|x|=\varepsilon}\frac{x}{|x|}\varphi(x)\underbrace{\frac{\partial F}{\partial n}}_{\nabla\varphi(x)}(x)\,d\sigma(x) = \varepsilon\int_{\omega\in S^1}\varphi(\varepsilon\omega)\,\frac{1}{\varepsilon}\,d\omega \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow}\varphi(0)\int_{\omega\in S^1}d\omega = 2\pi\varphi(0).$$

et si $d\geqslant 3$: $$\int_{|x|=\varepsilon}\frac{x}{|x|}\cdot\varphi(x)\underbrace{\frac{\partial F}{\partial n}}_{\nabla F(x)}(x)\,d\sigma(x) = \cancel{\varepsilon^{d-1}}\int_{\omega\in S^{d-1}}\varphi(\varepsilon\omega)\Big(-\frac{d-2}{\cancel{\varepsilon^{d-1}}}\Big)d\omega \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow}\varphi(0)\times(-(d-2))\times\sigma(S^{d-1}).$$

Donc :

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|>\varepsilon} F(x)(\Delta\varphi)(x)\,dx = \begin{cases} 2\pi\varphi(0) & \text{si } d=2 \\ -(d-2)\sigma(S^{d-1})\,\varphi(0) & \text{si } d\geq 3\end{cases}$$

Donc : $$\langle \Delta F,\varphi\rangle = \begin{cases} 2\pi\langle\delta_0,\varphi\rangle & \text{si } d=2 \\ -(d-2)\sigma(S^{d-1})\langle\delta_0,\varphi\rangle & \text{si } d\geq 3\end{cases}$$

5. On a, pour $\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$,

$$\langle\Delta E,\varphi\rangle = \begin{cases}\frac{1}{2\pi}\langle\Delta F,\varphi\rangle & \text{si } d=2\\ \frac{1}{-(d-2)\sigma(S^{d-1})}\langle\Delta F,\varphi\rangle & \text{si } d\geq 3\end{cases} = \begin{cases}\langle\delta_0,\varphi\rangle & \text{si } d=2\\ \langle\delta_0,\varphi\rangle & \text{si } d\geq 3\end{cases}$$

Donc $\Delta E=\delta_0$.

6. a. Si $p\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$ est à support compact, $\{\operatorname{supp} E, \operatorname{supp} p\}$ est convolutive et pour $d=3$, $-\Delta(E*(-p)) = -(\Delta E)*(-p) = (-\delta_0)*(-p) = p$.

Donc $V=E*(-p)$ est solution de $-\Delta V=p$ et elle tend vers 0 à l'infini car pour $d=3$, $E=-\frac{1}{4\pi|x|}$.

Si V_1 et V_2 sont deux solutions de $-\Delta V=p$ qui tendent vers 0 à l'infini, alors $\Delta(V_1-V_2)=0$ et par le théorème de Liouville, $V_1-V_2=0$. Donc $V_1=V_2$ et $E*(-p)$ est l'unique solution de $-\Delta V=p$ qui tende vers 0 à l'infini.

b. • Pour une charge unique à l'origine : $p=\delta_0$. Alors :

$$V = E*(-p) = E*(-\delta_0) = -E \qquad \text{i.e. } V(x)=\frac{1}{4\pi|x|}.$$

• Pour un dipôle : $p=\delta'_{x_0}$, $x_0\neq 0$. Alors :

$$V = E*(-p) = E*(-\delta'_{x_0}) = -(E*\delta_{x_0})' = (-E)'*\delta_{x_0}.$$

Donc : $$V(x) = \frac{1}{4\pi|x|}*\delta'_{x_0} = \left(\frac{1}{4\pi|x|}\right)'*\delta_{x_0} = \tau_{x_0}\left(\frac{x}{4\pi|x|^3}\right) = \frac{x-x_0}{4\pi|x-x_0|^3}$$