Ecole Sup Galilée
Filière MACS2
Mathématiques, Théorie Générale

2011 - 2012

(1)

Feuille de TD 5 : Distributions tempérées - Transformée de Fourier

Exercice 1 :

On commence par déterminer les solutions "classiques" de l'équation homogène associée $u'+u=0$. On trouve : $\forall x \in \mathbb{R}, u(x) = Ce^{-x}$, $C \in \mathbb{R}$.
Puis on cherche une distribution S solution particulière de $u'+u=\delta_0$ de la forme $S = e^{x}T$ où T est solution de $u'+u=\delta_0$. ("variation de la constante"). On a alors :

$$S' = (e^{x}T)' = e^{x}(T+T') = \delta_0 \, e^{x} = \delta_0 e^{0} = \delta_0 .$$

Donc $S = H + C$, $C \in \mathbb{R}$.
H : distribution de Heaviside : fonction caractéristique de $\mathbb{R}_+$

D'où : $T = H\, e^{-x} + Ce^{-x}$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Or, la distribution associée à $x \mapsto e^{-x}$ n'est pas dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ (voir le comportement en $-\infty$), donc la seule solution de $u'+u=\delta_0$ qui soit dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ est la distribution : $\boxed{T = He^{-x}}$

2

Exercice 2 :

1. Soit $a \in \mathbb{R}$. On a : $\mathcal{F}(\delta_a) = e^{-ia\xi}$. Puis par inversion de Fourier, $\mathcal{F}\mathcal{F}(\delta_a) = \mathcal{F}(e^{-ia\xi})$ avec $\mathcal{F}\mathcal{F} = 2\pi\,\sigma$ où $\sigma : \xi \mapsto -\xi$. D'où : $\delta_a = \frac{\sigma}{2\pi}\mathcal{F}(e^{-ia\xi}) = \frac{\mathcal{F}(e^{ia\xi})}{2\pi}$.

Donc : $\boxed{\mathcal{F}(e^{iax}) = 2\pi\,\delta_a}$

2. On écrit : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$.

D'où, par linéarité de $\mathcal{F}$ et par 1. :

$$\mathcal{F}(\cos x) = \frac{1}{2}\left(\mathcal{F}(e^{ix}) + \mathcal{F}(e^{-ix})\right) = \pi(\delta_{-1} + \delta_1)$$

3. On a :

$$\mathcal{F}(x\sin x) = i\partial_\xi\,\mathcal{F}(\sin x) = i\partial_\xi\left(\frac{\pi}{i}\,\delta_{-1} - \delta_1\right)$$
$$= \pi\left(\delta'_{-1} + \delta'_1\right).$$

4. Méthode directe : Si $u = \mathcal{F}\left(\frac{\sin x}{x}\right)$, comme $\sin x = \frac{\sin x}{x} \times x$, on a : $iu' = \mathcal{F}(\sin x)$, d'où : $u' = \mathcal{F}\left(-ix\,\frac{\sin x}{x}\right)$

et par 3. : $u' = -\pi(\delta_1 - \delta_{-1})$ (*)

Alors : $u'|_{]-\infty,-1[} = 0$, $u'|_{]-1,1[} = 0$ et $u'|_{]1,\infty[} = 0$
$\Rightarrow u|_{]-\infty,-1[} = a$ $\Rightarrow u|_{]-1,1[} = b$ $\Rightarrow u|_{]1,\infty[} = c$

Si on pose $\tilde{u} = \begin{cases} a & \text{si } x < -1 \\ b & \text{si } -1 < x < 1 \\ c & \text{si } x > 1 \end{cases}$, alors, par la formule des sauts : $\tilde{u}' = (b-a)\delta_{-1} + (c-b)\delta_1$ et on veut a, b, c tels que : $b - a = \pi$ et $c - b = -\pi$. Cela conduit à $c = a$ et $b = \pi + a$.

Alors : $\tilde{u} = a + \pi\mathbb{1}_{]-1,1[}$ est solution de (*) D'où la solution générale de (*) : $u = \tilde{u} + cte = A + \pi\mathbb{1}_{]-1,1[}$, $A \in \mathbb{R}$.

③ On, $\frac{\sin x}{x} \in L^2(\mathbb{R})$, donc par le théorème de Plancherel, $\mathcal{F}\left(\frac{\sin x}{x}\right) \in L^2(\mathbb{R})$. Donc, comme la constante A n'est pas $L^2(\mathbb{R})$, hormis si elle est nulle, on doit avoir $A=0$.

Finalement : $\underline{\mathcal{F}\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \pi \mathbb{1}_{]-1,1[}}$.

<u>Méthode inverse :</u> On a : $\mathcal{F}\left(\mathbb{1}_{]-1,1[}(x)\right) = \int_{-1}^{1} e^{-ix\xi}\,dx = \frac{2\sin\xi}{\xi}$

Puis : $\mathcal{F}\mathcal{F}\left(\mathbb{1}_{]-1,1[}(x)\right) = 2\,\mathcal{F}\left(\frac{\sin x}{x}\right)$

$$\underset{\displaystyle 2\pi \mathbb{1}_{]-1,1[}(x)}{\parallel}$$

D'où : $\mathcal{F}\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \pi \mathbb{1}_{]-1,1[}$.

5. On a, puisque $x \mapsto e^{-a|x|} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ car $a>0$:

$$\mathcal{F}(e^{-a|x|})(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|x|}\, e^{-ix\xi}\,dx = \int_{-\infty}^{0} e^{ax-ix.\xi}\,dx + \int_0^{+\infty} e^{-ax-i\xi x}\,dx$$

$$= \left[\frac{1}{a-i\xi} e^{(a-i\xi)x}\right]_{-\infty}^{0} + \left[-\frac{1}{a+i\xi} e^{-(a+i\xi)x}\right]_0^{+\infty}$$

$$= \frac{1}{a-i\xi} + \frac{1}{a+i\xi} = \frac{2a}{a^2+\xi^2}$$

Donc : $\underline{\mathcal{F}\left(e^{-a|x|}\right) = \frac{2a}{a^2+\xi^2}}$

6. De même : $\mathcal{F}\left(|x|e^{-a|x|}\right)(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} |x| e^{-a|x|} e^{-ix\xi}\,dx$

$$= \int_{-\infty}^{0} -x\, e^{ax-ix\xi}\,dx + \int_0^{+\infty} x\, e^{-ax-ix\xi}\,dx$$

$$= \left[-x\frac{1}{a-i\xi} e^{(a-i\xi)x}\right]_{-\infty}^{0} + \int_{-\infty}^{0} \frac{e^{(a-i\xi)x}}{a-i\xi}\,dx + \left[-\frac{x}{a+i\xi} e^{-(a+i\xi)x}\right]_0^{+\infty}$$

$$+ \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(a+i\xi)x}}{a+i\xi}\,dx$$

4

$$= 0 + \left[\frac{e^{(a-i\xi)x}}{(a-i\xi)^2} \right]_{-\infty}^{0} + 0 + \left[- \frac{e^{-(a+i\xi)x}}{(a+i\xi)^2} \right]_{0}^{+\infty}$$

$$= \frac{1}{(a-i\xi)^2} + \frac{1}{(a+i\xi)^2} = \frac{(a+i\xi)^2 + (a-i\xi)^2}{(a^2+\xi^2)^2} = \frac{2(a^2-\xi^2)}{(a^2+\xi^2)^2}$$

Donc : $\mathcal{F}(|x|e^{-a|x|}) = \dfrac{2(a^2-\xi^2)}{(a^2+\xi^2)^2}$

7. Comme $\sin 0 = 0$, on a : $\sin|x| = \sin x \, 1_{x>0} - \sin x \, 1_{x<0}$

Or : $\sin x \, 1_{x>0} = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \sin x \, e^{-\varepsilon x} 1_{x>0}$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$. $(*)$

Or : $\forall \varepsilon > 0$, $\mathcal{F}(\sin x \, e^{-\varepsilon x} 1_{x>0})(\xi) = \int_0^{+\infty} \sin x \, e^{-\varepsilon x - ix\xi} dx$

$$= \frac{1}{2i} \int_0^{+\infty} e^{x(i-\varepsilon-i\xi)} dx - \frac{1}{2i} \int_0^{+\infty} e^{-x(i+\varepsilon+i\xi)} dx$$

$$= \frac{1}{2i} \left[\frac{1}{i(\xi-1)+\varepsilon} - \frac{1}{i(\xi+1)+\varepsilon} \right]$$

$$= -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\xi-1-i\varepsilon} - \frac{1}{\xi+1-i\varepsilon} \right)$$

Or, on sait par l'exercice 6 de la Feuille de TD 2 que, dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$,

$$\frac{1}{y+a-i\varepsilon} \xrightarrow[\varepsilon \to 0^+]{} vp\left(\frac{1}{y+a}\right) + i\pi \delta_{a}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Donc : $\mathcal{F}(\sin x \, e^{-\varepsilon x} 1_{x>0}) \xrightarrow[\varepsilon \to 0^+]{} -\frac{1}{2}\left(vp\left(\frac{1}{\xi-1}\right) - vp\left(\frac{1}{\xi+1}\right)\right) + i\frac{\pi}{2}(\delta_1 - \delta_{-1})$

Et de même : $\mathcal{F}(\sin x \, e^{\varepsilon x} 1_{x<0}) \xrightarrow[\varepsilon \to 0^+]{} \frac{1}{2}\left(vp\left(\frac{1}{\xi-1}\right) - vp\left(\frac{1}{\xi+1}\right)\right) + i\frac{\pi}{2}(\delta_1 - \delta_{-1})$

D'où, comme la convergence de $(*)$ a lieu dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, on a :

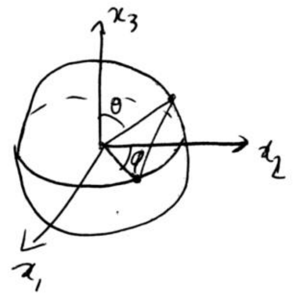
$$\boxed{\mathcal{F}(\sin|x|) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(\mathcal{F}(\sin e^{-\varepsilon x} 1_{x>0}) - \mathcal{F}(\sin x \, e^{\varepsilon x} 1_{x<0})\right) = vp\left(\frac{1}{\xi+1}\right) - vp\left(\frac{1}{\xi-1}\right)}$$

5

Exercice 3 :

On paramètre la sphère de rayon R et de centre O en coordonnées sphériques.

$$\begin{cases} x_1 = R\sin\theta \sin\varphi \\ x_2 = R\sin\theta\cos\varphi \\ x_3 = R\cos\theta \end{cases}$$



Alors : $d\sigma_R = R^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$ (Jacobien...)

Alors, $\sigma_R \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$ et comme elle est à support compact, $\sigma_R \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$. Puis : $\forall \xi \in \mathbb{R}^3, \hat{\sigma}_R(\xi) = \int_{S^2} e^{-ix.\xi} \, d\sigma_R(x)$

$S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3, \|x\| = 1\}$

Or, σ_R est invariante par toute rotation de $\mathbb{R}^3$, d'où :

$$\forall r \in SO(3), \quad \sigma_R \circ r = \sigma_R \text{ et } \hat{\sigma}_R \circ r = \hat{\sigma}_R.$$

(car $\det r = 1$).

D'où : $\forall \xi \in \mathbb{R}^3, \ \hat{\sigma}_R(\xi) = \hat{\sigma}_R(\|\xi\| \ (0,0,1))$ et :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^3, \ \hat{\sigma}_R(\xi) = \int_{S^2} e^{-ix.\|\xi\|(0,0,1)} \, d\sigma_R(x)$$

$$= \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} e^{-iR\cos\theta \|\xi\|} R^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$$

Si $\xi \neq 0$, on a : $\hat{\sigma}_R(\xi) = 2\pi \left[\frac{e^{-iR\cos\theta \|\xi\|}}{i\|\xi\|} R \right]_0^{\pi}$

$$= \frac{2\pi}{i} \frac{R}{\|\xi\|} \left(e^{iR\|\xi\|} - e^{-iR\|\xi\|} \right) = \frac{4\pi R}{\|\xi\|} \sin(R\|\xi\|)$$

$$= 4\pi R^2 \frac{\sin(R\|\xi\|)}{R\|\xi\|}$$

Pour $\xi = 0$: $\hat{\sigma}_R(0) = \lim_{\xi \to 0} \hat{\sigma}_R(\xi) = 4\pi R^2$ (aire de la sphère)

(6)

Exercice 4

Par le Théorème de Plancherel, comme $\frac{d^4 u}{dx^4} + k u \in L^2(\mathbb{R})$, $((i\xi)^4 + k)\hat{u}(\xi) \in L^2(\mathbb{R})$. Donc $\hat{u}$ est mesurable. Comme $k > 0$, $(i\xi)^4 + k = k + \xi^4 > 0$.

- Si $|\xi| \leq 1$, alors $\forall j \in \{0, .., 4\}$, $|\xi|^j \leq 1 \leq C_1 k$ si $C_1 \geq \frac{1}{k}$

  Donc : $\exists C_1 > 0$, $|\xi|^j \leq C_1 k \leq C_1(k + \xi^4)$.

- Si $|\xi| \geq 1$, alors pour $C_2 \geq 1$, $|\xi|^j \leq C_2 |\xi|^4 = C_2 \xi^4$

  D'où : $\exists C_2 > 0$ (≥ 1), $|\xi|^j \leq C_2(\xi^4 + k)$

Si $C = \max(C_1, C_2)$, on vient de montrer que dans tous les cas :
$\exists C > 0$, $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $|\xi|^j \leq C(k + \xi^4) \Rightarrow |\xi|^j |\hat{u}| \leq C(k + \xi^4)|\hat{u}|$ pour tout $j \in \{0, .., 4\}$. Par majoration, comme $(k + \xi^4)\hat{u} \in L^2(\mathbb{R})$, $\xi^j \hat{u} \in L^2(\mathbb{R})$ pour tout $j \in \{0, ..., 4\}$.

Par Plancherel : $\underline{\frac{d^j u}{dx^j} \in L^2(\mathbb{R}),\ \forall j \in \{0, .., 4\}}$.

Exercice 5

Tout d'abord, on remarque que comme u est à support compact, $\hat{u}$ est une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}^n$.

Appliquons $\mathcal{F}$ à l'équation $P(D)u = 0$: $P(\xi)\hat{u}(\xi) = 0, \forall \xi \in \mathbb{R}^n$.

Posons $Z = \{\xi \in \mathbb{R}^n, P(\xi) = 0\}$. Alors $\forall \xi \in \mathbb{R}^n \setminus Z, \hat{u}(\xi) = 0$.

Mais, comme P est un polynôme, Z est un fermé d'intérieur vide car P est non identiquement nul. Donc $\mathbb{R}^n \setminus Z$ est dense dans $\mathbb{R}^n$. Comme $\hat{u}$ est continue et nulle sur l'ensemble dense $\mathbb{R}^n \setminus Z$, $\hat{u}$ est nulle partout.

Par transformée de Fourier inverse, on obtient alors que $u = 0$

Exercice 6 :

Soit $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, $u \in \operatorname{Ker} P(D)$. Alors : $P(D)u = 0$.

Comme $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ et pas forcément, nous devons adapter l'argument de l'exercice 5.

Comme $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ et $P(D)u = 0$, par transformée de Fourier, $P(\xi)\hat{u} = 0$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Donc $\hat{u}$ est nulle dans $\mathbb{R}^n \setminus \Sigma$.

Comme $\Sigma = \{0\}$, on en déduit que $\operatorname{supp} \hat{u} \subset \Sigma = \{0\}$.

D'où : $\hat{u} = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \delta_0^{(\alpha)}$

Par transformée de Fourier inverse : $u = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha (ix)^\alpha$.

u est donc bien un polynôme.

9

Exercice 7 :

1. • Tout d'abord, on remarque que comme supp$(T*S)$ est inclus dans supp$T$ + supp$S$, puisque T_1 est à support compact, on montre par récurrence que toutes les T_k sont aussi à support compact.

• On rappelle aussi que pour a et b dans $\mathbb{R}$, on a :

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}),\ \langle \delta_a * \delta_b , \varphi \rangle = \langle \delta_a , \langle \delta_b , \varphi^\Delta \rangle\rangle$$

$$= \langle \delta_a , \varphi(x+b) \rangle$$

$$= \varphi(a+b) = \langle \delta_{a+b}, \varphi \rangle.$$

Donc : $\delta_a * \delta_b = \delta_{a+b}$.

• On peut alors calculer T_k. Soit $k \geq 2$:

$$T_k = \underbrace{T_1 * \dots * T_1}_{k \text{ fois}} = T_1^{*k} = \frac{1}{2^k}\left(\delta_1 + \delta_{-1}\right)^{*k}$$

Or $*$ est commutatif et associatif, on peut donc appliquer la formule du binôme de Newton pour obtenir :

$$T_k = \frac{1}{2^k} \sum_{j=0}^{k} C_k^j\ \delta_1^{*j} * \delta_{-1}^{*(k-j)}$$

$$= \frac{1}{2^k} \sum_{j=0}^{k} C_k^j\ \delta_j * \delta_{j-k}$$

$$= \frac{1}{2^k} \sum_{j=0}^{k} C_k^j\ \delta_{2j-k}$$

Donc : $\forall k \geq 2,\ T_k = \frac{1}{2^k} \sum_{j=0}^{k} C_k^j\ \delta_{2j-k}$.

(10)

2. Comme $T_k = T_1^{*k}$, on a : $\widehat{T_k}(\xi) = \left(\widehat{T_1}(\xi)\right)^k$

On : $\widehat{T_1}(\xi) = \frac{1}{2}\left(\widehat{\delta_1} + \widehat{\delta_{-1}}\right) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{par l'exercice 2}}}{=} \frac{1}{2}\left(e^{-i\xi} + e^{i\xi}\right) = \cos \xi$

Donc $\boxed{\widehat{T_k}(\xi) = (\cos \xi)^k}$ et $\widehat{T_k}$ est bien C^∞ (ce que l'on savait déjà car $T_k \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$).

3. D'après 2., on a : $\forall k \geq 1$, $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $f_k(\xi) = \left(\cos\left(\frac{\xi}{\sqrt{k}}\right)\right)^k$.

Alors, $f_k \in L^\infty(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, donc $f_k \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Pour montrer la convergence de f_k dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, on fixe $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et on cherche la limite éventuelle de $\langle f_k, \varphi \rangle$.

Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. On a :

$$\forall k \geq 1, \quad \langle f_k, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f_k(\xi)\varphi(\xi)\,d\xi .$$

On fixe $\xi \in \mathbb{R}$. Pour $k \geq 4|\xi|^2$, on a $\frac{|\xi|}{\sqrt{k}} \leq \frac{1}{2}$ et $\cos\left(\frac{\xi}{\sqrt{k}}\right) \geq 0$

On : $\cos\left(\frac{\xi}{\sqrt{k}}\right) = 1 - \frac{\xi^2}{2k} + o\left(\frac{\xi^2}{k}\right)$ et

$$\log f_k(\xi) = k \log\left(\cos\left(\frac{\xi}{\sqrt{k}}\right)\right) = k \log\left(1 - \frac{\xi^2}{2k} + o\left(\frac{\xi^2}{k}\right)\right)$$
$$= -\frac{\xi^2}{2} + \underset{k \to 0}{o}(\xi^2)$$

D'où : $\lim_{k \to +\infty} \log f_k(\xi) = -\frac{\xi^2}{2}$ et $\lim_{k \to +\infty} f_k(\xi) = e^{-\frac{\xi^2}{2}}$.

On : $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $|f_k(\xi)\varphi(\xi)| \leq |\varphi(\xi)| \in L^1(\mathbb{R})$ et est indépendant de k, donc par le théorème de convergence dominée,

(11)

$$\lim_{k\to+\infty} \langle f_k, \varphi\rangle = \lim_{k\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f_k(\xi)\varphi(\xi)\,d\xi$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \lim_{k\to+\infty} f_k(\xi)\varphi(\xi)\,d\xi$$

$$= \int_{\mathbb{R}} e^{-\xi^2/2}\,\varphi(\xi)\,d\xi$$

$$= \langle e^{-\xi^2/2}, \varphi\rangle .$$

D'où, $(f_k)_{k\geq 1}$ converge dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ vers $e^{-\xi^2/2}$.

4. Soit $g_k \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ telle que $f_k = \mathcal{F}(g_k)$.

Alors, $\mathcal{F}(f_k) = (2\pi\sigma)(g_k)$ et $g_k = \frac{1}{2\pi}(\mathcal{F}\circ\sigma)(f_k)$, $\forall k\geq 1$.

Par continuité de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, on déduit de la convergence dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ de $(f_k)_{k\geq 1}$, la convergence de $(g_k)_{k\geq 1}$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

De plus, $(g_k)_{k\geq 1}$ converge dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ vers $\frac{1}{2\pi}(\mathcal{F}\circ\sigma)(e^{-\frac{1}{2}\xi^2})$

et $\forall x\in\mathbb{R}$, $\frac{1}{2\pi}(\mathcal{F}\circ\sigma)(e^{-\frac{1}{2}\xi^2})(x) = \frac{1}{2\pi}\,\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{1/2}}\,e^{-\frac{(-x)^2}{4\times\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{\pi}}\,e^{-\frac{1}{2}x^2}$

Donc, dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$,

$$g_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-x^2/2}.$$

Exercice 8.

2. Par définition de $e^{is\Delta}$, on a, pour tout $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et tout t réel :

$$\mathcal{F}(e^{it\Delta} x e^{-it\Delta} \psi) = \mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}(e^{-it\xi^2} \mathcal{F}(x e^{-it\Delta} \psi))$$
$$= e^{-it\xi^2} \mathcal{F}(x e^{-it\Delta} \psi)$$

Puis $\mathcal{F}(x e^{-it\Delta}\psi) = \frac{1}{2\pi} (\mathcal{F}(x)) * \mathcal{F}(e^{-it\Delta}\psi)$

$$= \frac{1}{2\pi} (-2\pi D_\xi \delta_0) * \mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}(e^{-(-it\xi^2)} \mathcal{F}(\psi))$$
$$= i\,\delta_0' * e^{it\xi^2} \hat{\psi}(\xi)$$

D'où : $\mathcal{F}(e^{it\Delta} x e^{-it\Delta}\psi) = i e^{-it\xi^2} (\delta_0' * e^{it\xi^2} \hat{\psi}(\xi))$

$$= i e^{-it\xi^2} (\delta_0 * (e^{it\xi^2} \hat{\psi}(\xi))')$$
$$= i e^{-it\xi^2} (e^{it\xi^2} \hat{\psi}(\xi))' \quad \text{(car } \delta_0 \text{ élément neutre pour } *\text{)}$$
$$= i e^{-it\xi^2} \left(2it\xi e^{it\xi^2} \hat{\psi}(\xi) + e^{it\xi^2} \frac{d}{d\xi} \hat{\psi}(\xi)\right)$$

car $\mathcal{F}(D_x\psi) = \xi\mathcal{F}(\psi)$ et $\mathcal{F}(x\psi) = -D_\xi \mathcal{F}(\psi)$

$$= i\left(2it\xi \hat{\psi}(\xi) + \frac{d}{d\xi} \hat{\psi}(\xi)\right)$$
$$= i\,(2it\,\mathcal{F}(D_x\psi) - i\,\mathcal{F}(x\psi))$$

linéarité de $\mathcal{F}$

$$= \mathcal{F}(x\psi - 2t D_x \psi)$$

D'où, par transformée inverse de Fourier :

$\forall \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \forall t \in \mathbb{R}, \quad e^{it\Delta} x e^{-it\Delta} \psi = x\psi - 2t D_x \psi.$

1. Soient $t \in \mathbb{R}$ et $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. On a : $\mathcal{F}(e^{-it\Delta} e^{it\Delta} \psi) = \mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(e^{it\xi^2} \mathcal{F}(e^{it\Delta}\psi)))$

$= e^{it\xi^2} \mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(e^{-it\xi^2} \mathcal{F}(\varphi))) = e^{it\xi^2} e^{-it\xi^2} \mathcal{F}(\psi) = \mathcal{F}(\psi).$

Puis par Fourier inverse : $e^{-it\Delta} e^{it\Delta} \psi = \psi.$

13

3. Par linéarité, pour démontrer la formule demandée, il suffit de montrer que pour tout $k \geq 0$, on a :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \ e^{it\Delta} x^k e^{-it\Delta} \psi = (x - 2t D_x)^k \psi. \quad (*)$$

Pour $k=0$, il s'agit de la question 1.

Pour $k=1$, il s'agit de la question 2.

On peut procéder par récurrence sur k, l'initialisation à $k=0$ ou $k=1$ étant faite. Supposons le résultat vrai au rang $k \geq 1$.

Alors, par la question 1, comme $e^{it\Delta} e^{-it\Delta} = Id$:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), e^{it\Delta} x^{k+1} e^{-it\Delta} \psi = e^{it\Delta} x e^{-it\Delta} e^{it\Delta} x^k e^{-it\Delta} \psi$$

$$\overset{\text{Hyp de récurrence}}{=} e^{it\Delta} x e^{-it\Delta} \left((x - 2tD_x)^k \psi \right)$$

$$\overset{\text{par 2.}}{=} (x - 2tD_x)(x - 2tD_x)^k \psi$$

$$= (x - 2tD_x)^{k+1} \psi.$$

Donc $(*)$ est vraie au rang $k+1$. Par récurrence :

$$\forall k \geq 0, \forall t \in \mathbb{R}, \forall \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \quad e^{it\Delta} x^k e^{-it\Delta} \psi = (x - 2tD_x)^k \psi.$$

Puis, si $P(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k x^k$, par linéarité :

$$\forall \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \forall t \in \mathbb{R}, \quad e^{it\Delta} P(x) e^{-it\Delta} \psi = \sum_{k=0}^{m} a_k e^{it\Delta} x^k e^{-it\Delta} \psi$$

$$= \sum_{k=0}^{m} a_k (x - 2tD_x)^k \psi$$

$$= P(x - 2tD_x) \psi.$$

Exercice 9 :

Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ et soit $t>0$. On a, pour $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ telle que $\hat{T} \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$,

$$|\langle T, \varphi_t \rangle| = |\langle \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}T, \varphi_t \rangle|$$

$$= \left|\langle \mathcal{F}T, \left(\frac{1}{(2\pi)^n}(\mathcal{F}\circ\sigma)\right)\varphi_t \rangle\right|$$

$$= \left| \int_{\mathbb{R}^n} \hat{T}(\xi) \left(\frac{1}{(2\pi)^n}(\mathcal{F}\circ\sigma)\varphi_t\right)(\xi) \, d\xi \right|$$

$$\leq \|\hat{T}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \times \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} |((\mathcal{F}\circ\sigma)\varphi_t)(\xi)| \, d\xi .$$

On : $$((\mathcal{F}\circ\sigma)\varphi_t)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi\left(\frac{x}{t}\right) e^{ix\xi} \, dx \underset{y=\frac{x}{t},\ dx = t^n dy}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y) e^{ity\xi} t^n dy$$

$$= t^n \hat{\varphi}(-t\xi)$$

D'où : $$\int_{\mathbb{R}^n} |((\mathcal{F}\circ\sigma)\varphi_t)(\xi)| \, d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} |t^n \hat{\varphi}(-t\xi)| \, d\xi$$

$$\underset{\varsigma = t\xi}{=} \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{\varphi}(-\varsigma)| \, d\varsigma = \|\hat{\varphi}\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$$

D'où :

$$|\langle T, \varphi_t \rangle| \leq \|\hat{T}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \, \|\hat{\varphi}\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \times \frac{1}{(2\pi)^n} .$$