École Sup Galilée — Année 2011 - 2012

Filière MACS 2

Mathématiques, Théorie Générale

1

Feuille de TD 6 : Espaces de Sobolev

Exercice 1:

- On a : $\widehat{\delta_0}=1$, d'où : $\delta_0 \in H^s(\mathbb{R}^n) \Leftrightarrow (1+|\xi|^2)^{s/2}\times 1 \in L^2(\mathbb{R}^n)$

$$\Leftrightarrow (1+|\xi|^2)^{s} \in L^1(\mathbb{R}^n)$$

$$\Leftrightarrow 2s<-n \Leftrightarrow \boxed{s<-\frac{n}{2}}$$

- On a : $\widehat{\delta_0'} = i\xi\,\widehat{\delta_0} = i\xi$. D'où :

$$\delta_0' \in H^s(\mathbb{R}^n) \Leftrightarrow (1+|\xi|^2)^{s/2}|\xi| \in L^2(\mathbb{R}^n)$$

$$\Leftrightarrow (1+|\xi|^2)^{s}|\xi|^2 \in L^1(\mathbb{R}^n)$$

$$\Leftrightarrow 2s+2<-n \Leftrightarrow \boxed{s<-\frac{n}{2}-1}$$

- Pour $k\in(\mathbb{N})^n$, $\widehat{\delta_0^{(k)}} = (i\xi)^k\,\widehat{\delta_0} = (i\xi)^k$. D'où :

$$\delta_0^{(k)} \in H^s(\mathbb{R}^n) \Leftrightarrow (1+|\xi|^2)^{s/2}|\xi|^{|k|} \in L^2(\mathbb{R}^n)$$

longueur de k

$$\Leftrightarrow (1+|\xi|^2)^{s}|\xi|^{2|k|} \in L^1(\mathbb{R}^n)$$

$$\Leftrightarrow 2s+2|k|<-n \Leftrightarrow \boxed{s<-\frac{n}{2}-|k|}$$

- Pour $n=1$, $\widehat{H} = \frac{1}{i}\,vp\left(\frac{1}{\xi}\right)+\pi\delta_0$. Or : $\forall \xi\in\mathbb{R}$, $\pi(1+|\xi|^2)^{s/2}\delta_0(\xi)=\pi$ qui n'est pas dans $L^2(\mathbb{R})$. Donc $\boxed{\forall s\in\mathbb{R},\ H\notin H^s(\mathbb{R}).}$

- Pour $n=3$, $\widehat{\sigma_R}(\xi) = 4\pi R^2\,\frac{\sin(R|\xi|)}{R|\xi|}$. D'où :

$$\sigma_R \in H^s(\mathbb{R}^3) \Leftrightarrow (1+|\xi|^2)^{s/2}|\xi|^{-1} \in L^2(\mathbb{R}^3)$$

$$\Leftrightarrow (1+|\xi|^2)^{s}|\xi|^{-2} \in L^1(\mathbb{R}^3) \Leftrightarrow 2s-2<-3$$

$$\Leftrightarrow \boxed{s<-\frac{1}{2}}$$

Exercice 2

Soit $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ telle que $\Delta^2 u + 2\Delta u - u \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

Par transformée de Fourier et par Plancherel :

$$|\xi|^4 \hat{u}(\xi) + 2|\xi|^2 \hat{u}(\xi) - \hat{u}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n)$$

$$\Rightarrow (|\xi|^4 - 2|\xi|^2 - 1)\hat{u}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

Or, on veut montrer que $(1+|\xi|^2)^2 \hat{u}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n)$, ce qui signifie exactement que $u \in H^4(\mathbb{R}^n)$.

On écrit :

$$(1+|\xi|^2)^2 \hat{u}(\xi) = \underbrace{\frac{(1+|\xi|^2)^2}{|\xi|^4 - 2|\xi|^2 - 1}}_{L^\infty(\mathbb{R}^n \setminus K)} \underbrace{(|\xi|^4 - 2|\xi|^2 - 1)\hat{u}(\xi)}_{\in L^2(\mathbb{R}^n)}$$

où K est un compact de $\mathbb{R}^n$ contenant les zéros de $|\xi|^4 - 2|\xi|^2 - 1$. (si $\xi \in \mathbb{R}^n$ est un tel zéro, $|\xi| \leq \max\{|x| \,/\, x \in \mathbb{R}$ et $x^4 - 2x^2 - 1 = 0\}$)

Donc $(1+|\xi|^2)^2 \hat{u}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n)$ et $u \in H^4(\mathbb{R}^n)$.

3

Exercice 3

Soit $s \in \mathbb{R}$.

- Tout d'abord, montrons que P est bien défini de $H^{s+2}(\mathbb{R}^n)$ dans $H^s(\mathbb{R}^n)$. Soit $u \in H^{s+2}(\mathbb{R}^n)$. On a :

$$\mathcal{F}(-\Delta u + \lambda u)(\xi) = (|\xi|^2 + \lambda)\hat{u}(\xi), \ \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

D'où : $$(1+|\xi|^2)^{s/2} |\mathcal{F}(-\Delta u + \lambda u)| = (1+|\xi|^2)^{s/2}(|\xi|^2+\lambda)|\hat{u}|$$
$$\leq \max(1,\lambda)\ (1+|\xi|^2)^{s/2+1} |\hat{u}| \quad (*)$$

Comme $u \in H^{s+2}(\mathbb{R}^n)$, $(1+|\xi|^2)^{s/2+1}|\hat{u}| \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

D'où : $-\Delta u + \lambda u \in H^s(\mathbb{R}^n)$. Comme P est linéaire, P est bien linéaire de $H^{s+2}(\mathbb{R}^n)$ dans $H^s(\mathbb{R}^n)$.

- Montrons que P est une application linéaire continue. D'après l'inégalité $(*)$: $\|-\Delta u + \lambda u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} \leq \max(1,\lambda) \|u\|_{H^{s+2}(\mathbb{R}^n)}$

i.e : $\forall u \in H^{s+2}(\mathbb{R}^n)$, $\|Pu\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} \leq \max(1,\lambda)\|u\|_{H^{s+2}(\mathbb{R}^n)}$.

Ainsi, P est continue et $|||P||| \leq \max(1,\lambda)$.

- Montrons que P est injective. Soit $u \in H^{s+2}(\mathbb{R}^n)$ telle que $Pu=0$.

Alors : $(|\xi|^2+\lambda)\hat{u} = 0$ et comme $|\xi|^2+\lambda > 0$, $|\xi|^2+\lambda \neq 0$

d'où : $\hat{u} = 0$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. D'où $u=0$. Donc $\operatorname{Ker} P = \{0\}$.

et P est injective.

- Montrons que P est surjective. Soit $f \in H^s(\mathbb{R}^n)$.

Posons $u = \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\hat{f}}{|\xi|^2+\lambda}\right) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Alors $\mathcal{F}(Pu) = (|\xi|^2+\lambda)\hat{u} = \hat{f}$.

Donc : $Pu = f$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Il nous reste à vérifier que u telle qu'on l'a définie est dans $H^{s+2}(\mathbb{R}^n)$.

(4) On a :

$$(1+|\xi|^2)^{\frac{s+1}{2}} \, |\hat{u}| = (1+|\xi|^2)(1+|\xi|^2)^{s/2}|\hat{u}|$$

$$= \frac{1+|\xi|^2}{\lambda+|\xi|^2}(1+|\xi|^2)^{s/2}\,|\hat{f}|.$$

$$\leq \max\left(1, \frac{1}{\lambda}\right)(1+|\xi|^2)^{s/2}\,|\hat{f}|$$

Or, comme $f \in H^s(\mathbb{R}^n)$, $(1+|\xi|^2)^{s/2}|\hat{f}| \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Ainsi, $(1+|\xi|^2)^{s/2+1}|\hat{u}| \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Donc $u \in H^{s+2}(\mathbb{R}^n)$.

Ainsi, si $f \in H^s(\mathbb{R}^n)$, il existe $u \in H^{s+2}(\mathbb{R}^n)$ telle que $Pu = f$. P est bien surjective.

- Il reste à vérifier que P^{-1} est continue. Or, P est une bijection linéaire continue entre deux espaces de Banach, P^{-1} est donc continue par le théorème de l'isomorphisme de Banach.

Exercice 4 :

1. Pour $t=0$, on a $u(0)=f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ par hypothèse.

Puis, si $t>0$, $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ donc $\hat{f} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ et $\xi \mapsto e^{-t\xi^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

Donc $\xi \mapsto e^{-t\xi^2}\hat{f}(\xi) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ et $\mathcal{F}^{-1}(e^{-t\xi^2}\hat{f}) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Donc : $\boxed{\forall t \geq 0,\ u(t) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})}$

2. On a : $\mathcal{F}(u(t)) = e^{-t\xi^2}\hat{f}$, donc $\widehat{u(t)}$ est une fonction mesurable

et :
$$(1+|\xi|^2)^{s/2}\,|\widehat{u(t)}(\xi)| = (1+|\xi|^2)^{s/2}\,|e^{-t\xi^2}\hat{f}(\xi)|$$
$$\leq (1+|\xi|^2)^{s/2}\,|\hat{f}(\xi)|.$$

Comme $f \in H^s(\mathbb{R})$, ce majorant est dans $L^2(\mathbb{R})$. Donc $u(t) \in H^s(\mathbb{R})$ et l'inégalité ci-dessus se réécrit :

$$\boxed{\|u(t)\|_{H^s(\mathbb{R})} \leq \|f\|_{H^s(\mathbb{R})}}$$

3. Pour $k \in \mathbb{N}$, $t>0$ et $\xi \in \mathbb{R}$, on a :

$$|\mathcal{F}(D_x^k u(t))(\xi)| = |\xi^k\,\widehat{u(t)}(\xi)| = |\xi|^k e^{-t\xi^2}|\hat{f}(\xi)|$$

- Si $k=0$, $C=1$ convient en majorant $e^{-t\xi^2}$ par 1 et en intégrant sur $\mathbb{R}$ puis en appliquant Plancherel.
- Supposons $k \geq 1$. On commence par déterminer :

$$\sup_{x\geq 0} x^k e^{-tx^2}.$$

Soit $g : \begin{array}{l}\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \\ x \mapsto x^k e^{-tx^2}\end{array}$. Alors $\forall x \geq 0$, $g'(x) = kx^{k-1}e^{-tx^2} + x^k(-2tx)e^{-tx^2}$
$$= x^{k-1}(k-2tx^2)e^{-tx^2}.$$

Alors : $g'(x)=0 \iff \begin{cases} x=0 \\ \text{ou} \\ x=\sqrt{\frac{k}{2t}} \end{cases}$.

Puis : $g(0)=0$ et $g\left(\sqrt{\frac{k}{2t}}\right) = \left(\sqrt{\frac{k}{2t}}\right)^k e^{-t\frac{k}{2t}} = e^{-k/2}\sqrt{\frac{k}{2}}\,\frac{1}{t^{k/2}}$.

D'où, en posant $C_k = e^{-k/2}\sqrt{\frac{k}{2}}$: $\sup_{x\geq 0} x^k e^{-tx^2} = \frac{C_k}{t^{k/2}}$.

6

Alors :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad |\mathcal{F}(D_x^k u(t))(\xi)| \leq \frac{C_k}{t^{k/2}} |\hat{f}(\xi)|$$

$$\Leftrightarrow \forall \xi \in \mathbb{R}, \quad |\mathcal{F}(D_x^k u(t))(\xi)|^2 \leq \frac{C_k^2}{t^k} |\hat{f}(\xi)|^2$$

$$\Rightarrow \quad \int_{\mathbb{R}} |\mathcal{F}(D_x^k u(t))(\xi)|^2 d\xi \leq \frac{C_k^2}{t^k} \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi$$

i.e. :

$$\| \mathcal{F}(D_x^k(u(t))) \|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \frac{C_k}{t^{k/2}} \|\hat{f}\|_{L^2(\mathbb{R})}$$

et par Plancherel (comme $f \in L^2(\mathbb{R})$, $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$ et $\mathcal{F}(D_x^k(u(t)))$ est aussi dans $L^2(\mathbb{R})$) :

$$\boxed{\| D_x^k u(t) \|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \frac{C_k}{t^{k/2}} \|f\|_{L^2(\mathbb{R})} \text{ avec } C_k = e^{-\frac{k}{2}} \sqrt{\frac{k}{2}} > 0}$$

4.a. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. Soit $t > 0$. Alors $e^{-t\xi^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. De plus, comme $f \in L^1(\mathbb{R})$, $\hat{f} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Alors :

$$u(t)(x) = \mathcal{F}^{-1}(e^{-t\xi^2} \hat{f})(x) = (\mathcal{F}^{-1}(e^{-t\xi^2}) * f)(x)$$

Or, comme $\mathcal{F}(e^{-tx^2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{t}} e^{-\frac{\xi^2}{4t}}$, on a :

$$\mathcal{F}^{-1}(e^{-t\xi^2}) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{t}} e^{-\frac{(-x)^2}{4t}}.$$

D'où : $$\boxed{u(t)(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \left(e^{-\frac{x^2}{4t}} * f\right)(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} f(y)\, dy}$$

b. On : $\forall y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, \forall t > 0$, $\left|e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}\right| \leq 1$. D'où :

$$\boxed{\forall t > 0, \quad \|u(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} |f(y)|\, dy = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \|f\|_{L^1(\mathbb{R})}.}$$

5.a. On rappelle que la transformée de Fourier injecte continûment $L^1(\mathbb{R})$ dans $C^0_{\to 0}(\mathbb{R})$, l'espace des fonctions continues qui tendent vers 0 à l'infini.

Donc, si $f \in L^1(\mathbb{R})$, $\hat{f} \in C^0_{\to 0}(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$.

De plus, si $xf \in L^1(\mathbb{R})$, alors $D_\xi \hat{f} \in C^0_{\to 0}(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$.

D'où : $\boxed{\hat{f} \in C^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}).}$

b. Soit $\xi \in \mathbb{R}$. Comme $\hat{f}$ est C^1, on peut écrire :

$$\hat{f}(\xi) - \hat{f}(0) = \int_0^\xi \hat{f}'(u)\,du = \xi \int_0^1 \hat{f}'(s\xi)\,ds.$$

D'où :

$$|\hat{f}(\xi) - \hat{f}(0)| \leq |\xi|\, \|\hat{f}'\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = |\xi|\, \|\widehat{xf}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq |\xi|\, \|xf\|_{L^1(\mathbb{R})}.$$

Donc : $\boxed{\forall \xi \in \mathbb{R} : |\hat{f}(\xi) - \hat{f}(0)| \leq |\xi|\, \|xf\|_{L^1(\mathbb{R})}.}$

c. Soit $t > 0$ et $\xi \in \mathbb{R}$. On a :

$$|v(t,\xi)| = |\hat{f}(\xi) - \hat{f}(0)|\, e^{-\frac{1}{2}t\xi^2} \leq |\xi| e^{-\frac{1}{2}t\xi^2} \|xf\|_{L^1(\mathbb{R})}.$$

Or par une étude analogue à celle menée à la question $3.$, on a :

$$\sup_{x \geq 0} x e^{-\frac{1}{2}tx^2} = \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{t}}$$

D'où : $\boxed{|v(t,\xi)| \leq \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{t}} \|xf\|_{L^1(\mathbb{R})}.}$

8

d. On a : $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $\hat{f}(\xi) e^{-t\xi^2} = e^{-t\xi^2} \hat{f}(0) + e^{-\frac{1}{2}t\xi^2} v(t,x)$

D'où : $u(t) = \mathcal{F}^{-1}(e^{-t\xi^2}) \hat{f}(0) + \mathcal{F}^{-1}(e^{-\frac{1}{2}t\xi^2} v(t,x))$

$$= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx + \mathcal{F}^{-1}(e^{-\frac{1}{2}t\xi^2} v(t,x))$$

Posons $\boxed{R(t)(x) = \mathcal{F}^{-1}(e^{-\frac{1}{2}t\xi^2} v(t,x)).}$

Alors : $\boxed{u(t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx + R(t)(x)}$

De plus : $\forall t > 0$, $|R(t)(x)| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} e^{-\frac{1}{2}t\xi^2} v(t,\xi)\, d\xi \right|$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}t\xi^2} |v(t,\xi)|\, d\xi$$

par 5.c. $\rightarrow \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}t\xi^2} \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{t}} \|xf\|_{L^1(\mathbb{R})}\, d\xi$

$$= \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{2\pi\sqrt{t}} \|xf\|_{L^1(\mathbb{R})} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}t\xi^2}\, d\xi$$

Or : $\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}t\xi^2}\, d\xi = \mathcal{F}^{-1}(e^{-\frac{1}{2}t\xi^2})(0) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\frac{1}{2}t}} e^{-\frac{(-0)^2}{2t}}$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{t}}.$$

Donc, si on pose $C = \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} > 0$, on a bien :

$$\forall t > 0, \ |R(t)(x)| \leq \frac{C}{t} \|xf\|_{L^1(\mathbb{R})}.$$

Ainsi, $R(t) \in L^\infty(\mathbb{R})$ et : $\boxed{\forall t > 0, \ \|R(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \frac{C}{t} \|xf\|_{L^1(\mathbb{R})}}$

Exercice 5 :

1. Soit $s \in \mathbb{R}$. On a pour $a, b \geq 0$, $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$

D'où, comme : $\forall \xi, \eta \in \mathbb{R}^n$, $|\xi| \leq |\xi-\eta| + |\eta|$, on a :

$$|\xi|^2 \leq (|\xi-\eta| + |\eta|)^2 \leq 2|\xi-\eta|^2 + 2|\eta|^2.$$

Alors : $1+|\xi|^2 \leq 1 + 2(|\xi-\eta|^2 + |\eta|^2)$

car $1 \leq 2$! $\rightarrow \leq 2(1+|\xi-\eta|^2+|\eta|^2)$

car $|\xi-\eta|^2|\eta|^2 \geq 0$ $\rightarrow \leq 2(1+|\xi-\eta|^2)(1+|\eta|^2)$ $(*)$

- Pour $s \geq 0$, il vient :

$$(1+|\xi|^2)^s \leq 2^s (1+|\xi-\eta|^2)^s (1+|\eta|^2)^s.$$

- Pour $s < 0$, en échangeant les rôles de ξ et η dans $(*)$, on a :

$$1+|\eta|^2 \leq 2(1+|\eta-\xi|^2)(1+|\xi|^2)$$

D'où : $(1+|\xi|^2)^{-1} \leq 2(1+|\xi-\eta|^2)(1+|\eta|^2)^{-1}$

En élevant à la puissance $-s > 0$:

$$(1+|\xi|^2)^s \leq 2^{-s}(1+|\xi-\eta|^2)^{-s}(1+|\eta|^2)^s.$$

D'où : $\forall s \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{(1+|\xi|^2)^s \leq 2^{|s|}(1+|\xi-\eta|^2)^{|s|}(1+|\eta|^2)^s}$$

2. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Soit $s \geq 0$. Soit enfin $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$.

Alors, $\hat{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $\hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ et $\widehat{\varphi u} = \frac{1}{(2\pi)^n} \hat{\varphi} * \hat{u}$.

(10) Il vient :

$$\|\varphi u\|^2_{H^s(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}\times 2} |\widehat{\varphi u}(\xi)|^2 \, d\xi$$
$$= \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^s \left| \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\varphi}(\eta)\, \hat{u}(\xi-\eta)\, d\eta \right|^2 d\xi$$
$$\leq \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^s \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\hat{\varphi}(\eta)|\,|\hat{u}(\xi-\eta)|\, d\eta \right)^2 d\xi.$$

On applique Cauchy-Schwarz à la fonction $|\hat{\varphi}(\eta)|^{1/2} \times |\hat{\varphi}(\eta)|^{1/2} |\hat{u}(\xi-\eta)|$ dans l'intégrale en η : $\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\hat{\varphi}(\eta)|\,|\hat{u}(\xi-\eta)|\, d\eta \right)^2 \leq \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\hat{\varphi}(\eta)| \, d\eta \right)}_{= \|\hat{\varphi}\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\hat{\varphi}(\eta)|\,|\hat{u}(\xi-\eta)|^2 d\eta \right)$

Alors :

$$\|\varphi u\|^2_{H^s(\mathbb{R}^n)} \leq \|\hat{\varphi}\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^s \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\hat{\varphi}(\eta)|\,|\hat{u}(\xi-\eta)|^2 d\eta \right) d\xi$$
$$\overset{\text{Fubini-Tonelli}}{=} \|\hat{\varphi}\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \iint_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^s \, |\hat{\varphi}(\eta)|\,|\hat{u}(\xi-\eta)|^2 \, d\eta\, d\xi$$

Or, par 1., $(1+|\xi|^2)^s \leq 2^s (1+|\xi-\eta|^2)^s (1+|\eta|^2)^s$, d'où :

$$\|\varphi u\|^2_{H^s(\mathbb{R}^n)} \leq \|\hat{\varphi}\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \iint_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} 2^s (1+|\eta|^2)^s |\hat{\varphi}(\eta)| \, (1+|\xi-\eta|^2)^s |\hat{u}(\xi-\eta)|^2 \, d\eta\, d\xi$$
$$\overset{\text{Fubini-Tonelli}}{=} 2^s \|\hat{\varphi}\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\eta|^2)^s |\hat{\varphi}(\eta)| \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi-\eta|^2)^s |\hat{u}(\xi-\eta)|^2 d\xi \right)}_{= \|u\|^2_{H^s(\mathbb{R}^n)}} d\eta$$

Donc $\|\varphi u\|^2_{H^s(\mathbb{R}^n)} \leq 2^s \|\hat{\varphi}\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \left(\int_{\mathbb{R}^n} (1+|\eta|^2)^s |\hat{\varphi}(\eta)| \, d\eta \right) \|u\|^2_{H^s(\mathbb{R}^n)} < +\infty$

D'où $\varphi u \in H^s(\mathbb{R}^n)$ et $\exists C_\varphi > 0$, $\|\varphi u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} \leq C_\varphi \|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}$

d'où la continuité de $\begin{matrix} H^s(\mathbb{R}^n) \to H^s(\mathbb{R}^n) \\ u \mapsto \varphi u \end{matrix}$.

Exercice 6 : Paramétrixe des opérateurs elliptiques.

1. Tout d'abord, comme p_m est homogène : $\forall \xi \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda \in \mathbb{R}, p_m(\lambda\xi) = \lambda^m p_m(\xi)$

- On suppose $\xi = 0$. Alors $|\xi|^m = 0$ et toute constante $C_0 > 0$ convient

  donc $|p_m(\xi)| \geq C_0 \times 0$.

- On peut donc supposer que $\xi \neq 0$. Alors par homogénéité :

$$p_m\left(|\xi| \frac{\xi}{|\xi|}\right) = |\xi|^m p_m\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right) \Rightarrow \frac{p_m(\xi)}{|\xi|^m} = p_m\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right).$$

Or, $\frac{\xi}{|\xi|} \in S^{n-1}$ qui est compacte et p_m est continue sur S^{n-1}.

De plus, comme P est elliptique, p_m ne s'annule pas sur S^{n-1}.

Donc : $\exists C_0 > 0$ tel que $\left|p_m\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right)\right| \geq C_0, \forall \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

soit encore : $\boxed{\forall \xi \in \mathbb{R}^n, |p_m(\xi)| \geq C_0 |\xi|^m.}$

- Puis, pour $\xi \neq 0$, on écrit $p(\xi) = p_m(\xi) + q_{m-1}(\xi) = p_m(\xi)\left(1 + \frac{q_{m-1}(\xi)}{p_m(\xi)}\right)$

Comme $\left|\frac{q_{m-1}(\xi)}{p_m(\xi)}\right| \xrightarrow[|\xi| \to +\infty]{} 0$, il existe $R > 0$ tel que :

$$\left|1 + \frac{q_{m-1}(\xi)}{p_m(\xi)}\right| \geq \frac{1}{2} \quad \text{pour } |\xi| \geq R.$$

On obtient alors : $\boxed{|p(\xi)| \geq \frac{1}{2}|p_m(\xi)| \geq \frac{C_0}{2}|\xi|^m, \forall \xi, |\xi| \geq R.}$

2. Pour montrer que $v \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, il suffit de montrer que $v \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

On : - si $|\xi| \leq R$, $v(\xi) = 0$

- si $|\xi| > R$, $v(\xi) = \frac{1}{|p(\xi)|} \leq \frac{2}{C_0}\frac{1}{|\xi|^m} < \frac{2}{C_0}\frac{1}{R^m}$.

Donc $\boxed{v \in L^\infty(\mathbb{R}^n).}$

(12)

- Posons alors $E = \mathcal{F}^{-1}(v)$. On a :

$$\underline{PE} = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(PE))$$
$$= \mathcal{F}^{-1}(p(\xi)\hat{E}(\xi))$$
$$= \mathcal{F}^{-1}(p(\xi)\hat{v}(\xi))$$
$$= \mathcal{F}^{-1}(1-\chi(\xi)) \quad \text{avec } \chi(\xi) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$
$$= \mathcal{F}^{-1}(1) + \underbrace{\mathcal{F}^{-1}(-\chi(\xi))}_{\in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)} \quad \text{car } \mathcal{F}^{-1} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$
$$\underline{= \delta_0 + \omega \quad \text{avec } \omega = \mathcal{F}^{-1}(-\chi(\xi)) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).}$$

<u>3.</u> On utilise le théorème d'injection de Sobolev. Soit $\beta \in \mathbb{N}^n$ et $\alpha \in \mathbb{N}^n$

- $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$, $\mathcal{F}(\partial^\beta(x^\alpha E))(\xi) = i^{|\beta|}\mathcal{F}(D^\beta(x^\alpha E))(\xi) = i^{|\beta|}\xi^\beta \mathcal{F}(x^\alpha E)(\xi)$

$$= i^{|\beta|}\xi^\beta \left(i\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^\alpha \hat{E}(\xi)$$
$$= i^{|\alpha|+|\beta|}\xi^\beta \left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^\alpha v(\xi)$$
$$= i^{|\alpha|+|\beta|}\xi^\beta \left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^\alpha \left(\frac{1-\chi(\xi)}{p(\xi)}\right)$$

- Alors : · pour $|\xi| \leq R$, $1-\chi(\xi) = 0$ et $\mathcal{F}(\partial^\beta(x^\alpha E))(\xi) = 0$.
  - pour $|\xi| > R$, $\mathcal{F}(\partial^\beta(x^\alpha E))(\xi) = i^{|\alpha|+|\beta|}\xi^\beta \left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^\alpha \left(\frac{1}{p(\xi)}\right)$

  D'où : pour $|\xi| > R$, $|\mathcal{F}(\partial^\beta(x^\alpha E))| \leq C|\xi|^{|\beta|}|\xi|^{-m-|\alpha|}$

  En effet, $\left|\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^\alpha \left(\frac{1}{p(\xi)}\right)\right| \leq \frac{\tilde{C}}{|p(\xi)||\xi|^{|\alpha|}} \leq C|\xi|^{-m-|\alpha|}$.

- Si $s \in \mathbb{R}$, on a : $\left|(1+|\xi|^2)^{s/2}\mathcal{F}(\partial^\beta(x^\alpha E))\right| \leq C(1+|\xi|^2)^{s/2}|\xi|^{|\beta|-|\alpha|}|\xi|^{-m}$

(13). Ce majorant est dans $L^2(\mathbb{R})$ si et seulement si :

$$m-s-|\beta|+|\alpha| > \frac{m}{2} \Leftrightarrow m-|\beta|-|\alpha| > \frac{m}{2}-s.$$

Or, si $s > \frac{m}{2}$, par le théorème d'injection de Sobolev, $\partial^\beta(x^\alpha E)$ est continue. Dès lors que $m-|\beta|+|\alpha| > n$, on a bien $s > \frac{m}{2}$.

Donc, pour β fixé, il suffit de prendre $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tel que :

$$\boxed{|\alpha| \geq n+|\beta|-m.}$$

- On en déduit que si $k \in \mathbb{N}$ est fixé, alors pour $|\alpha| \geq n+k-m$, $x^\alpha E$ est de classe $C^k(\mathbb{R}^n)$.

Alors : $E = \frac{1}{x^\alpha}(x^\alpha E)$ est aussi de classe C^k sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ (pour $|\alpha| \geq n+k-m$)

Cela étant valable pour tout k, on en déduit que $E \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$

4. Soit $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Soit $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ telle que $Pu=f$.

Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ telle que $\varphi \equiv 1$ au voisinage de 0.

On a : $P(\varphi E) = \varphi PE + \psi$ où $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$

En effet, par la formule de Leibniz :

$$P(\varphi E) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} (\partial^\beta \varphi)(\partial^{\alpha-\beta} E) = \varphi PE + \psi$$

$$\text{avec } \psi = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha \sum_{0<\beta\leq\alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^\beta \varphi \, \partial^{\alpha-\beta} E$$

Or : $PE = \delta_0 + \omega$ avec $\omega \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Donc :

Ici, on introduit φ comme troncature pour que la convolution soit définie ($f * E$ ne l'est pas a priori).

$P(\varphi E) = \varphi \delta_0 + \varphi\omega + \psi$. Or $\varphi\omega + \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$

Posons $\theta = \varphi\omega + \psi$. On a : $u = u * \delta = u * (P(\varphi E) - \theta) = (Pu) * (\varphi E) - u * \theta$

$$= \underbrace{f * (\varphi E)}_{\in C^\infty \text{ car } f \in C^\infty} - \underbrace{u * \theta}_{\in C^\infty \text{ car } \theta \in C^\infty} \quad \boxed{\text{Donc } u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)}$$

Exercice 7 : Inégalité de Poincaré

1. Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'élément de E qui converge vers un élément u de $H^1(B)$. Montrons que $u \in E$.

On a : $$\Big|\underbrace{\int_B u_k(x)\,dx}_{=0} - \int_B u(x)\,dx\Big| \leq \int_B |u_k(x)-u(x)|\,dx$$
$$\underset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} \text{vol}(B)^{1/2}\|u_k - u\|_{L^2(B)}$$

Comme $u_k \xrightarrow{H^1(B)} u$, on a aussi $u_k \xrightarrow{L^2(B)} u$ et $\|u_k - u\|_{L^2(B)} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$.

D'où : $\int_B u(x)\,dx = 0$ et $u \in E$. Donc E est fermé dans $H^1(B)$.

2. Supposons (1) fausse : $\forall C>0, \exists u \in E, \|u\|_{L^2(B)} > C\|\nabla u\|_{L^2(B)}$.
Pour C prenant les valeurs $k\in\mathbb{N}^*$, cela nous donne l'existence d'une suite $(v_k)_{k\geq 1}$ d'éléments de E telle que :
$$\forall k \geq 1, \quad \|v_k\|_{L^2(B)} > k\|\nabla v_k\|_{L^2(B)}. \quad (*)$$
Si $v_k = 0$, alors $0 > k\times 0$ ce qui est absurde. Donc on peut supposer que pour tout $k\geq 1$, $\|v_k\|_{L^2(B)} > 0$. Posons alors : $\forall k\geq 1$, $u_k = \dfrac{v_k}{\|v_k\|_{L^2(B)}}$.
Alors : $\forall k \geq 1$, $\|u_k\|_{L^2(B)} = 1$ et par $(*)$: $\forall k\geq 1, \|\nabla u_k\|_{L^2(B)} < \frac{1}{k}$
donc $(\nabla u_k)_{k\geq 1}$ tend vers 0 dans $L^2(B)$.

3. La suite $(u_k)_{k\geq 1}$ construite à la question 2. est bornée dans $H^1(B)$.
Comme l'injection de $H^1(B)$ dans $L^2(B)$ est compacte, il existe une sous-suite de $(u_k)_{k\geq 1}$ $(u_{\varphi(k)})_{k\geq 1}$ qui converge vers une limite u dans $L^2(B)$.

15

Alors, comme pour tout $k \geq 1$, $\|u_{\varphi(k)}\|_{L^2(B)} = 1$, on a : $\|u\|_{L^2(B)} = 1$.

De plus, comme $u_{\varphi(k)} \xrightarrow{L^2(B)} u$, alors $(\nabla u_{\varphi(k)})_{k \geq 1}$ converge vers ∇u dans $\mathcal{D}'(B)$.

Or, d'après 2. comme $(\nabla u_k)_{k \geq 1}$ converge vers 0 dans $L^2(B)$, on en déduit, $(\nabla u_{\varphi(k)})_{k \geq 1}$ converge aussi vers 0 dans $L^2(B)$ donc converge vers 0 dans $\mathcal{D}'(B)$.

Ainsi, $\nabla u = 0$ dans $\mathcal{D}'(B)$, par unicité de la limite. Comme B est connexe, on en déduit que u est une constante M et que $(u_{\varphi(k)})_{k \geq 1}$ converge vers M dans $H^1(B)$ ($u_{\varphi(k)} \xrightarrow{L^2(B)} M$ et $\nabla u_{\varphi(k)} \xrightarrow{L^2(B)} 0$ $=$ « $(M)'$ »)

Or, d'après la question 1., E est un espace fermé, donc comme chaque $u_k \in E$, chaque $u_{\varphi(k)} \in E$ et u doit appartenir à E aussi. Alors $\int_B u(x)\,dx = 0 = \int_B M\,dx = M\,vol(B) \Rightarrow M = 0$.

Donc $u = 0$. Or, $\|u\|_{L^2(B)} = 1$. Contradiction et résultat : $(*)$ est vérifiée : $\boxed{\exists C > 0,\ \forall u \in E,\ \|u\|_{L^2(B)} \leq C \|\nabla u\|_{L^2(B)}}$

4. Soit $u \in H^1(B)$. Posons $v = u - \frac{1}{vol(B)} \int_B u(x)\,dx$. Alors $\int_B v(x)\,dx = 0$ et $v \in H^1(B)$, donc $v \in E$. On applique $(*)$ à v en remarquant que $\nabla v = \nabla u$. Donc :

$$\boxed{\exists C > 0,\ \forall u \in H^1(B),\ \left\| u - \frac{1}{vol(B)} \int_B u(x)\,dx \right\|_{L^2(B)} \leq C \|\nabla u\|_{L^2(B)}.}$$