**École Sup Galilée** **2011-2012**
**Filière MACS2**
**Mathématiques, Théorie Générale**

# Devoir maison 1 : Distributions

Ce devoir est à rendre pour le 29 mars 2012 . Le plus grand soin sera apporté à la rédaction des démonstrations.

## Exercice 1

Soit $u$ une fonction continue sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ telle que

$$\forall t > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},\ u(tx) = t^{-n}\ u(x).$$

**1.** Soient $\varepsilon > 0$ et $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. On pose

$$I_\varepsilon(\varphi) = \int_{|x|\geq\varepsilon} u(x)\varphi(x)\mathrm{d}x.$$

Montrer que $\lim_{\varepsilon\to 0^+} I_\varepsilon(\varphi)$ existe pour toute $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ si et seulement si

$$\int_{|\omega|=1} u(\omega)\mathrm{d}\omega = 0. \tag{1}$$

*Indication : Passer en coordonnées polaires* $(r, \omega) \in ]0, +\infty[\times S^{n-1}$ *pour* $|x| \geq \varepsilon$. *Puis utiliser la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre* 1.

**2.** On suppose que la condition (1) est satisfaite. On pose alors, pour toute $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$,

$$< T, \varphi >= \lim_{\varepsilon\to 0^+} I_\varepsilon(\varphi).$$

Montrer que $T$ définit un élément de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ d'ordre au plus 1.

## Exercice 2

**1.** Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Calculer $(xT)'$.

**2.** Montrer que $x\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right) = 1$.

**3.** Résoudre, dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, l'équation différentielle :

$$xT' + T = 0.$$