École Sup Galilée **2011-2012**
Filière MACS2
Mathématiques, Théorie Générale

Devoir maison 2 : Dérivation et suites de distributions

Ce devoir est à rendre pour le 03 mai 2012. Le plus grand soin sera apporté à la rédaction des démonstrations.

Exercice 1

On considère l'opérateur différentiel sur $\mathbb{R}$

$$P = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + a\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + b, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Soient f et g deux fonctions de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ telles que :

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ (Pf)(x) = (Pg)(x) = 0.$
2. $f(0) = g(0).$
3. $f'(0) - g'(0) = 1.$

On considère la fonction h définie par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad x \leq 0 \\ g(x) & \text{si} \quad x > 0. \end{cases}$$

Soit enfin T la distribution définie par,

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}),\ < T, \varphi >= -\int_{\mathbb{R}} h(x)\varphi(x)\mathrm{d}x.$$

Montrer que $PT = \delta_0$, au sens des distributions.

Exercice 2

On note T_n, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la distribution associée à la fonction localement intégrable

$$t \mapsto \frac{\sin(nt)}{\pi t}.$$

Montrer que la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ vers la distribution δ_0.
Indication : on pourra se servir de l'identité

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\ \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$$