

Devoir maison 3 : Transformée de Fourier

Ce devoir est à rendre pour le mardi 22 mai 2012. Le plus grand soin sera apporté à la rédaction des démonstrations.

Exercice 1

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = e^x \cos(e^x).$$

1. Montrer qu'il n'existe pas de polynôme P tel que : $\forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq |P(x)|$.
2. Montrer que, pour toute $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)dx$$

est convergente.

3. Montrer que S définie par

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \langle S, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)dx,$$

est une distribution tempérée sur \mathbb{R} .

Exercice 2

On note $T = \text{vp}\left(\frac{1}{x}\right)$ la distribution *valeur principale* sur \mathbb{R} . On note aussi H la distribution de Heaviside, distribution associée à la fonction caractéristique de \mathbb{R}^+ .

1. Montrer que $xT = 1$ au sens des distributions.
2. En appliquant la transformée de Fourier à l'égalité $xT = 1$, montrer qu'il existe une constante C telle que

$$\widehat{T} = -2i\pi H + C.$$

3. Soit \check{T} la distribution définie par

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}), \langle \check{T}, \varphi \rangle = \langle T, \check{\varphi} \rangle,$$

où : $\forall x \in \mathbb{R}, \check{\varphi}(x) = \varphi(-x)$. Justifier que $\check{T} = -T$ (on rappelle qu'ici $T = \text{vp}\left(\frac{1}{x}\right)$). En déduire que pour toute $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}), \langle \widehat{\check{T}}, \check{\varphi} \rangle = \langle -\widehat{T}, \varphi \rangle$.

4. Déduire de la question précédente la valeur de la constante C obtenue à la question 2.
5. En utilisant ce qui précède et le fait que $\check{T} = -T$, calculer \widehat{H} .