Sup Galilée
Filière MACS 2
Mathématiques - Théorie Générale

Année 2012 - 2013

(1)

Devoir Maison 1 - Correction

Exercice 1

Nous allons appliquer le théorème de dérivabilité sous le signe intégral.

Soit $f : \begin{array}{l}]0,+\infty[\times]0,+\infty[\to \mathbb{R} \\ (\lambda, t) \mapsto e^{-\lambda t}\frac{\sin t}{t} \end{array}$. Alors $\lambda \mapsto f(\lambda,t)$ est de classe C^∞ sur $]0,+\infty[$ à $t\in]0,+\infty[$ fixé et $t \mapsto f(\lambda,t)$ est dans $L^1(]0,+\infty[)$ à λ fixé. (car fait continue et intégrable sur $]0,+\infty[$).

Soit $a>0$. On fixe $t\in]0,+\infty[$. On a :

$$\forall \lambda\in[a,+\infty[, \quad |f(\lambda,t)| \leq e^{-at}\frac{\sin t}{t}$$ qui est intégrable sur $]0,+\infty[$. et indépendant de λ

Donc F est continue sur $[a,+\infty[$.

De plus, $\forall \lambda\in[a,+\infty[$, $\left|\frac{\partial}{\partial\lambda}f(\lambda,t)\right| = \left|-t\, e^{-\lambda t}\frac{\sin t}{t}\right| = |e^{-\lambda t}\sin t| \leq e^{-at}$

qui est intégrable sur $]0,+\infty[$ et indépendant de λ.

Donc F est dérivable sur $[a,+\infty[$ de dérivée : $F'(\lambda) = \int_0^{+\infty} -e^{-\lambda t}\sin t\, dt$.

Enfin F est C^1 sur $[a,+\infty[$ car on peut appliquer le théorème de continuité sous le signe intégrale à F'.

Soit $x_0\in]0,+\infty[$. Il existe $a>0$ tel que $x_0\in[a,+\infty[$.
Alors F est C^1 sur $[a,+\infty[$ donc en x_0. Donc F est C^1 sur $]0,+\infty[$.

②

Exercice 2

1. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. On applique la formule de Taylor avec reste intégral à φ à l'ordre 2 :

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \varphi(0) + x\varphi'(0) + x^2 \int_0^1 (1-t)\varphi''(tx)\,dt$

On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\psi(x) = \int_0^1 (1-t)\,\varphi''(tx)\,dt$.

Alors ψ est C^∞ sur $\mathbb{R}$ et : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad |\psi(x)| \leq \int_0^1 |1-t|\,|\varphi''(tx)|\,dt \leq \|\varphi''\|_\infty$.

D'où : $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |\psi(x)| \leq \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |\varphi''(x)|$.

2. Soient $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ et $\varepsilon > 0$. Soit $M > 0$ tel que $\operatorname{supp}\varphi \subset [-M, M]$. On a :

$$I_\varepsilon(\varphi) = \varphi(0)\int_{M\geq|x|\geq\varepsilon} \frac{dx}{x^2} + \varphi'(0)\int_{M\geq|x|>\varepsilon} \frac{dx}{x} + \int_{M\geq|x|>\varepsilon} \psi(x)\,dx - \frac{2\varphi(0)}{\varepsilon}$$

Alors, par imparité de $x \mapsto \frac{1}{x}$, $\int_{M\geq|x|>\varepsilon} \frac{dx}{x} = 0$ et : $\int_{M\geq|x|>\varepsilon} \frac{dx}{x^2} = \left[-\frac{1}{x}\right]_\varepsilon^M + \left[-\frac{1}{x}\right]_{-M}^{-\varepsilon}$

$$= -\frac{1}{M} + \frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{M}$$

$$= \frac{2}{\varepsilon} - \frac{2}{M}.$$

D'où :

$$I_\varepsilon(\varphi) = \frac{2\varphi(0)}{\varepsilon} - \frac{2\varphi(0)}{M} + \int_{M\geq|x|>\varepsilon} \psi(x)\,dx - \frac{2\varphi(0)}{\varepsilon}$$

$$= \int_{M\geq|x|>\varepsilon} \psi(x)\,dx - \frac{2\varphi(0)}{M}.$$

Comme $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} \int_{M\geq|x|>\varepsilon} \psi(x)\,dx = \int_{M\geq|x|} \psi(x)\,dx$.

Donc $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} I_\varepsilon(\varphi) = \int_{M\geq|x|} \psi(x)\,dx - \frac{2\varphi(0)}{M} < +\infty$ et cette limite existe bien

③

Soit $K \subset \mathbb{R}$ un compact

3. V. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\operatorname{supp} \varphi \subset K$. Alors si $K \subset [-M, M]$,

on a :
$$\left|\langle Pf\left(\frac{1}{x^2}\right), \varphi\rangle\right| = \left|\int_{|x| \leq M} \psi(x)\,dx - \frac{2\varphi(0)}{M}\right| \leq 2M\|\psi\|_\infty + \frac{2}{M}\|\varphi\|_\infty$$
$$\underset{\text{par 1.}}{\leq} 2M\|\varphi''\|_\infty + \frac{2}{M}\|\varphi\|_\infty.$$

Donc $Pf\left(\frac{1}{x^2}\right)$ est bien une distribution sur $\mathbb{R}$ d'ordre au plus 2.

4. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ et soit $M > 0$ tel que $\operatorname{supp} \varphi \subset [-M, M]$. Alors,
$$\langle vp\left(\frac{1}{x}\right)', \varphi\rangle = -\langle vp\left(\frac{1}{x}\right), \varphi'\rangle = -\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x| > \varepsilon} \frac{\varphi'(x)}{x}\,dx$$

Or, pour tout $\varepsilon > 0$:
$$\int_{|x| > \varepsilon} \frac{\varphi'(x)}{x}\,dx = \int_{M \geq |x| > \varepsilon} \frac{\varphi'(x)}{x}\,dx$$
$$= \left[\frac{\varphi(x)}{x}\right]_{-M}^{-\varepsilon} + \left[\frac{\varphi(x)}{x}\right]_{\varepsilon}^{M} + \int_{M \geq |x| > \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2}\,dx$$
$$= -\frac{\varphi(-\varepsilon)}{\varepsilon} - \frac{\varphi(\varepsilon)}{\varepsilon} + \int_{M \geq |x| > \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2}\,dx.$$

Or, on peut écrire en applique Taylor avec reste intégral à φ à l'ordre 1 :
$$\varphi(\varepsilon) = \varphi(0) + \varepsilon\tilde{\psi}(\varepsilon) \quad \text{et } \varphi(-\varepsilon) = \varphi(0) - \varepsilon\tilde{\psi}(-\varepsilon)$$

D'où : $$-\frac{\varphi(\varepsilon) + \varphi(-\varepsilon)}{\varepsilon} = -\frac{2\varphi(0)}{\varepsilon} - \underbrace{(\tilde{\psi}(\varepsilon) + \tilde{\psi}(-\varepsilon))}_{\xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0}$$

D'où : $$-\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x| > \varepsilon} \frac{\varphi'(x)}{x}\,dx = -\left(\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{M \geq |x| > \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2}\,dx - \frac{2\varphi(0)}{\varepsilon}\right)$$
$$= -\langle Pf\left(\frac{1}{x^2}\right), \varphi\rangle.$$

D'où : $$vp\left(\frac{1}{x}\right)' = -Pf\left(\frac{1}{x^2}\right).$$