Sup Galilée

Filière MACS 2

Mathématiques - Théorie Générale

Année 2012 - 2013

1

Devoir maison 2 : Correction

Exercice 1

1. Soit $x_0 \in I$ et $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$ une primitive de f. Alors, F est C^∞ sur I. De plus, l'équation différentielle $u' + fu = g$ est équivalente à $\frac{d}{dx}(e^F u) = e^F g$ qui a pour solution C^∞,

$$u_0(x) = e^{-F(x)} \left(\int_{x_0}^{x} e^{F(t)} g(t)\,dt + C \right), \quad C \in \mathbb{R}.$$

2. Posons $T = u_0 + e^{-F} S$. Alors, on a :

$$g = T' + fT = u_0' + fu_0 + e^{-F}(S' - fS) + e^{-F} fS$$
$$= g + e^{-F} S'$$

D'où, $e^{-F} S' = 0$ et $S' = 0$. Alors S est une constante et $T = u_0 + Ce^{-F}$. Donc T est donnée par une fonction C^∞ qui vérifie l'équation au sens usuel.

2

Exercice 2 :

1. Soit $t \not\equiv 0\,[2\pi]$. Alors : $\sum_{k=-N}^{N} e^{ikt} = e^{-iNt} + \dots + 1 + \dots + e^{iNt}$

$$= e^{-iNt}\left[1 + \dots + e^{2iNt}\right]$$

$$= e^{-iNt} \frac{e^{i(2N+1)t} - 1}{e^{it} - 1}$$

$$= \underbrace{e^{-iNt} e^{i\left(\frac{2N+1}{2}\right)t} e^{-i\frac{t}{2}}}_{=1} \frac{e^{i\left(\frac{2N+1}{2}\right)t} - e^{-i\left(\frac{2N+1}{2}\right)t}}{e^{i\frac{t}{2}} - e^{-i\frac{t}{2}}}$$

$$= \frac{\sin\left(\frac{2N+1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}}$$

Donc : $\forall t \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$, $F_N(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin\left(\frac{2N+1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}}$.

2. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\operatorname{supp}\varphi \subset [-(2M+1)\pi, (2M+1)\pi]$. Alors, pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$\langle T_N, \varphi \rangle = \int_{-(2M+1)\pi}^{(2M+1)\pi} F_N(t)\varphi(t)\,dt = \sum_{m=-M}^{M} \int_{2m\pi-\pi}^{2m\pi+\pi} F_N(t)\varphi(t)\,dt$$

$$\overset{u = t + 2m\pi}{=} \sum_{m=-M}^{M} \int_{-\pi}^{\pi} F_N(u)\,\varphi(u - 2m\pi)\,du$$

par 2π périodicité de F_N

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin\left(\frac{2N+1}{2}\right)u}{\sin\frac{u}{2}} \underbrace{\sum_{m=-M}^{M} \varphi(u - 2m\pi)}_{=\phi(u)} du$$

③

3. On écrit $\phi(t)=\phi(0)+t\psi(t)$, $\psi\in C^{\infty}(\mathbb{R})$. D'où :

$\forall N\in\mathbb{N}$, $\quad \langle T_N,\varphi\rangle = \frac{1}{2\pi}\phi(0)\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin\left(\frac{2N+1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}}\,dt + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{t}{\sin\frac{t}{2}}\psi(t)\sin\left(\frac{2N+1}{2}\right)t\,dt$

Or, $t\mapsto\frac{t}{\sin\frac{t}{2}}\psi(t)\in L^1([-\pi,\pi])$, donc par Riemann-Lebesgue la seconde intégrale tend vers 0 lorsque N tend vers l'infini.

D'autre part :

$$\frac{\phi(0)}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin\left(\frac{2N+1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}}\,dt = \phi(0)\int_{-\pi}^{\pi}F_N(t)\,dt = \frac{\phi(0)}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{k=-N}^{N}e^{ikt}\,dt$$

$$=\frac{\phi(0)}{2\pi}\times 2\pi = \phi(0)$$

Donc : $\langle T_N,\varphi\rangle \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \phi(0) = \sum_{k=-M}^{M}\varphi(2k\pi) = \sum_{k\in\mathbb{Z}}\varphi(2k\pi)$

$$=\langle \sum_{m\in\mathbb{Z}}\delta_{2\pi m},\varphi\rangle.$$

Donc $(T_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge vers $\sum_{m\in\mathbb{Z}}\delta_{2\pi m}$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

On en déduit la formule de Poisson :

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}}e^{imx} = 2\pi\sum_{m\in\mathbb{Z}}\delta_{2\pi m}.$$