Ecole Sup Galilée

Filière MACS 2

Mathématiques, Théorie Générale

2012-2013

1

Devoir maison 3 : Correction

Exercice 1 - Théorème d'échantillonage de Shannon

1. Soit $n \in \mathbb{Z}$. On a :

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(\xi)\, e^{-in\xi}\, d\xi$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \hat{f}(\xi)\, e^{-in\xi}\, d\xi$$

car $\operatorname{supp}\hat{f} \subset [-\pi,\pi]$ donc $\hat{f}(\xi)=0\ \forall \xi \notin [-\pi,\pi]$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi)\, e^{-in\xi}\, d\xi$$

$$= \frac{1}{2\pi}\hat{\hat{f}}(n) = \frac{1}{2\pi}\, 2\pi f(-n) = f(-n).$$

2. Soit $t \in \mathbb{R}$. On a :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi)\, e^{i\xi t}\, d\xi \underset{\text{car } \operatorname{supp}\hat{f} \subset [-\pi,\pi]}{=} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \hat{f}(\xi)\, e^{i\xi t}\, d\xi = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(\xi) e^{-in\xi}\, d\xi$$

Comme g 2π-périodique on peut écrire son développement en série de Fourier :

$$\forall \xi \in \mathbb{R},\quad g(\xi) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{in\xi} \underset{\text{par } 1.}{=} \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(-n)\, e^{in\xi}$$

D'où : $\forall t \in \mathbb{R}$, $f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(-n)\, e^{i(n+t)\xi}\, d\xi$

Or, comme $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, on a en particulier : $\forall n \in \mathbb{Z}$, $|f(-n)| \leq \frac{1}{n^2}$.

D'où : $\forall n \in \mathbb{Z}, \forall \xi \in [-\pi,\pi]$, $|f(-n)\, e^{i(n+t)\xi}| \leq \frac{1}{n^2}$.

Donc la série de fonctions $\xi \mapsto \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(-n)\, e^{i(n+t)\xi}$ converge normalement sur $[-\pi,\pi]$, donc on peut intervertir la somme et l'intégrale.

② D'où : $\forall t \in \mathbb{R}\ , f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{2\pi} f(-n) \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n+t)\xi}\, d\xi.$

3. On a :

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ \forall t \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z},\ \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n+t)\xi}\, d\xi = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{i(n+t)} e^{i(n+t)\xi}\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\frac{1}{i(n+t)}\left(e^{i(n+t)\pi} - e^{-i(n+t)\pi}\right)$$

$$= \frac{\sin((n+t)\pi)}{(n+t)\pi}$$

Or, $t \mapsto \frac{\sin((n+t)\pi)}{(n+t)\pi}$ se prolonge par continuité en $t=-n$ $\left(\underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-n)\xi} d\xi}_{=1} = \text{valeur de la limite} = 1\right)$, donc on peut écrire que :

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ \forall t \in \mathbb{R},\ \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n+t)\xi}\, d\xi = \frac{\sin((n+t)\pi)}{(n+t)\pi}$$

D'où par 2. :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(-n)\, \frac{\sin(\pi(n+t))}{\pi(n+t)}$$

On vient donc d'obtenir une formule exacte de reconstitution du signal f à partir uniquement des valeurs de ce signal aux points entiers (les "$f(-n)$").

③

Exercice 2

1. Soit $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ telle que $P(D)u = 0$. avec $D_j = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_j}$.

On a : $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$, $\widehat{P(D)u}(\xi) = \widehat{\sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^n \\ |\alpha| \leq m}} a_\alpha D^\alpha u}(\xi)$

$$= \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^n \\ |\alpha| \leq m}} a_\alpha \underbrace{\widehat{D^\alpha u}(\xi)}_{\xi^\alpha \hat{u}} = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^n \\ |\alpha| \leq m}} a_\alpha \xi^\alpha \hat{u}(\xi) = P(\xi)\hat{u}(\xi).$$

D'où : $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$, $P(\xi)\hat{u}(\xi) = 0$.

2. Comme Σ est le lieu d'annulation de P, on en déduit que : $\forall \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \Sigma$, $P(\xi) \neq 0$. D'où : $\forall \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \Sigma$, $\hat{u}(\xi) = 0$.

Donc : $\operatorname{supp} \hat{u} \subset \Sigma$

3. Comme par hypothèse $\Sigma = \{0\}$, il vient : $\operatorname{supp} \hat{u} \subset \{0\}$.

Donc, comme $\hat{u}$ est à support nul, il existe une famille finie $(c_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq N}$ de nombres complexes telle que :

$$\hat{u} = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^n \\ |\alpha| \leq N}} c_\alpha \delta_0^{(\alpha)}$$

(cf DM1, Exercice 2)

4. Par transformée de Fourier inverse :

$$u = \frac{1}{2\pi}\hat{\hat{u}} = \frac{1}{2\pi}\sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^n \\ |\alpha| \leq N}} c_\alpha (ix)^\alpha = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^n \\ |\alpha| \leq N}} \frac{i^\alpha c_\alpha}{2\pi} x^\alpha$$

Donc si $u \in \operatorname{Ker}(P(D))$, u est un polynôme.