Sup Galilée

Filière MACS 2

Mathématiques - Théorie Générale

Année 2012 - 2013

1

Feuille de TD 1

Exercice 1 :

Supposons par l'absurde qu'il existe $g \in L^1(\mathbb{R})$ telle que :

$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad n e^{-n|x|} \leq g(x)$.

Comme les $x \mapsto n e^{-n|x|}$ sont mesurables et dominées par une fonction intégrable, on peut appliquer le théorème de convergence dominée :

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{\mathbb{R}} n e^{-n|x|} dx = \int_{\mathbb{R}} \lim_{n \to +\infty} n e^{-n|x|} dx = \int_{\mathbb{R}} 0 \, dx = 0.$$

Or : $\forall n \in \mathbb{N}, \int_{\mathbb{R}} n e^{-n|x|} dx = \int_{-\infty}^{0} n e^{nx} dx + \int_{0}^{+\infty} n e^{-nx} dx$

$= 1 + 1 = 2.$

Contradiction.

②

Exercice 2

Soit $\mathbb{1}_{[0,\sqrt{n}]}(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in [0,\sqrt{n}] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$. Alors soit pour $n \geq 0$,

$$u_n = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[0,\sqrt{n}]}(t) \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt$$

Posons $f_n : t \mapsto \mathbb{1}_{[0,\sqrt{n}]}(t)\left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n$. Alors : $\forall t \in \mathbb{R}$, $f_n(t) \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-t^2}$

Alors : $\forall t \in \mathbb{R}$, $f_n(t) \leq e^{-t^2}$ qui est dans $L^1(\mathbb{R})$ et indépendante de n.

Par le TCD,

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to+\infty} f_n(t)\, dt = \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}.$$

(3) **Exercice 3 :**

1. On étudie les variations de $f : \begin{array}{l} [0,1[\to \mathbb{R} \\ u \mapsto u + \log(1-u) \end{array}$.

f est C^∞ sur $[0,1[$ et : $\forall u \in [0,1[,\ f'(u) = 1 - \dfrac{1}{1-u} \leq 0$.

Donc f est $\searrow$ et $f(0) = 0$. Donc : $\forall u \in [0,1[,\ f(u) \leq 0$.

2. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. On applique 1. avec $u = \dfrac{y^2}{\lambda^3}$ et, lorsque $|y| < \lambda^{3/2}$ (i.e $u \in [0,1[$), on a :

$$\lambda^3 \log\left(1 - \frac{y^2}{\lambda^3}\right) \leq -y^2 \quad \left(= -\frac{y^2}{\lambda^3} \times \lambda^3 \right).$$

Alors :

$$(*) \qquad \exp\left(\lambda^3 \log\left(1 - \frac{y^2}{\lambda^3}\right)\right) \left|\varphi\left(\frac{y}{\lambda}\right)\right| \leq e^{-y^2} \sup_{z \in \mathbb{R}} |\varphi(z)| \quad \text{/ int sur } \mathbb{R} \text{ et ind de } \lambda.$$

Donc par le théorème de convergence dominée :

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(\lambda^3 \log\left(1 - \frac{y^2}{\lambda^3}\right)\right) \varphi\left(\frac{y}{\lambda}\right) dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \lim_{\lambda \to +\infty} \exp\left(\lambda^3 \log\left(1 - \frac{y^2}{\lambda^3}\right)\right) \varphi\left(\frac{y}{\lambda}\right) dy$$

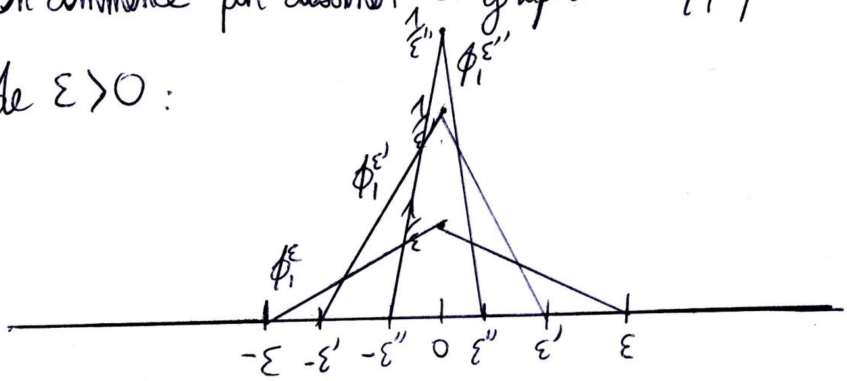
$$= \int_{\mathbb{R}} \varphi(0)\, e^{-y^2} dy = \sqrt{\pi}\, \varphi(0).$$

((*) En effet, pour λ assez grand, (*) est vérifiée. $\exists R > 0$ tq si $\varphi\left(\frac{y}{\lambda}\right) \neq 0$ on ait $|y| \leq R\lambda < \lambda^{3/2}$ (si $\sqrt{\lambda} > R$).

④

Exercice 4 - Autour du Dirac

On commence par dessiner le graphe de ϕ_1^ε pour différentes valeurs de $\varepsilon > 0$:



1. On a : $\forall x, |x| > 0, \exists \varepsilon > 0, \varepsilon < |x|$

D'où $\forall x, |x| > 0, \exists \varepsilon > 0, \phi_1^\varepsilon(x) = 0$.

Donc si $x \neq 0$, $\phi_1^\varepsilon(x) \xrightarrow[\varepsilon \to 0^+]{} 0$.

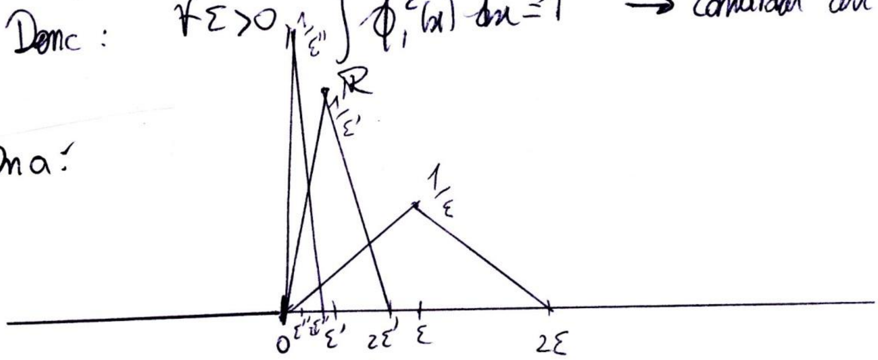
Si $x = 0$, $\phi_1^\varepsilon(0) = \frac{1}{\varepsilon} \xrightarrow[\varepsilon \to 0^+]{} +\infty$.

Donc $\phi_1^\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0^+]{} \begin{cases} 0 & \text{pour } x \neq 0 \\ +\infty & \text{pour } x = 0 \end{cases}$

2. L'intégrale sur $\mathbb{R}$ de ϕ_1^ε est l'aire du triangle qui vaut 1.

Donc : $\forall \varepsilon > 0, \int_{\mathbb{R}} \phi_1^\varepsilon(x)\,dx = 1$ → candidat au Dirac

3. On a :



On a : $\phi_2^\varepsilon(0) = \phi_1^\varepsilon(-\varepsilon) = 0$.

De plus : $\forall x > 0, \exists \varepsilon > 0, x > 2\varepsilon$ et donc pour ε assez petit, $\phi_2^\varepsilon(x) = 0$.

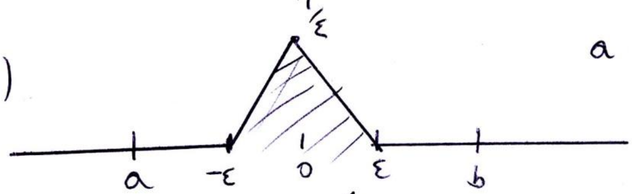
Enfin, $\forall x < 0, \forall \varepsilon > 0, \phi_2^\varepsilon(x) = 0$.

Donc $\phi_2^\varepsilon(x) \xrightarrow[\varepsilon \to 0^+]{} 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

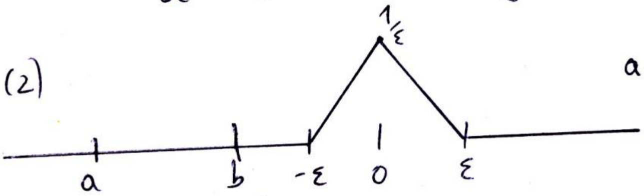
⑤ On : $\forall \varepsilon > 0, \int_{\mathbb{R}} \phi_2^{\varepsilon}(x)\,dx = 1$.

Ici, avec l'intégrale et la limite simple on ne voit même pas la singularité en 0.

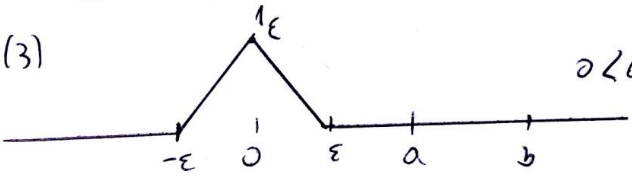
4. (1) $a < 0 < b$



(2) $a < b < 0$



(3) $0 < a < b$



Cas (1) $\exists \varepsilon(a,b) > 0$ assez petit tel que $a < -\varepsilon(a,b) < 0 < \varepsilon(a,b) < b$.

Alors : $\int_a^b \phi_1^{\varepsilon}(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} \phi_1^{\varepsilon}(x)\,dx = 1$. Alors : $I_1(a,b) = 1$.

Cas (2) $\exists \varepsilon(a,b) > 0$ tel que $a < b < -\varepsilon(a,b) < 0$

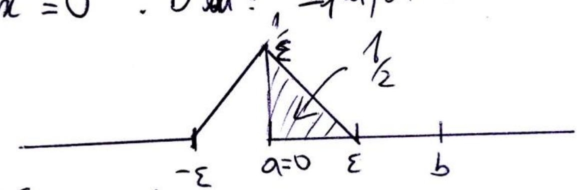
D'où : $\forall \varepsilon > 0, \varepsilon < \varepsilon(a,b), \int_a^b \phi_1^{\varepsilon}(x)\,dx = \int_a^b 0\,dx = 0$.

Alors $I_1(a,b) = 0$

Cas (3) : $\exists \varepsilon(a,b) > 0$ tel que $0 < \varepsilon(a,b) < a < b$ et $\forall \varepsilon < \varepsilon(a,b)$,

$\int_a^b \phi_1^{\varepsilon}(x)\,dx = 0$. D'où : $I_1(a,b) = 0$.

Enfin, si $a = 0$ ou $b = 0$:



$\forall \varepsilon > 0, \int_a^b \phi_1^{\varepsilon}(x)\,dx = \frac{1}{2}$

Donc :
$$I_1(a,b) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \in]a,b[\\ 0 & \text{si } 0 \notin [a,b] \\ \frac{1}{2} & \text{si } a=0 \text{ ou } b=0 \end{cases}$$

Donc $I_1(a,b)$ mesure l'appartenance ou non de 0 à $[a,b]$.

6

5. On a : $I_1^\varepsilon(\phi) = \int_{\mathbb{R}} \phi_1^\varepsilon(x)\,\phi(x)\,dx$

$$= \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon^2}(\varepsilon - |x|)\,\phi(x)\,dx$$

$$\underset{dx=\varepsilon dt}{\overset{x=\varepsilon t}{=}} \int_{-1}^{1} \frac{1}{\cancel{\varepsilon^2}}(\cancel{\varepsilon} - |\cancel{\varepsilon} t|)\,\phi(\varepsilon t)\,\cancel{\varepsilon}\,dt$$

$$= \int_{-1}^{1} (1-|t|)\,\phi(\varepsilon t)\,dt$$

$$\xrightarrow[\varepsilon \to 0]{TCD} \int_{-1}^{1} (1-|t|)\,\phi(0)\,dt = \phi(0)$$

Donc : $\underline{I_1^\varepsilon(\phi) \underset{\varepsilon \to 0^+}{\longrightarrow} \phi(0).}$

6. On a : $\forall \varepsilon > 0,\ |I_1^\varepsilon(\phi)| \leq \int_{-1}^{1} (1-|t|)\,|\phi(\varepsilon t)|\,dt$

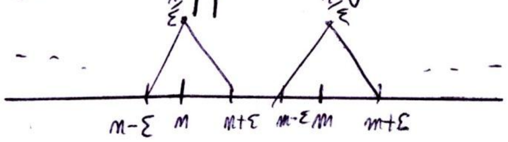
$$\leq 1 \times \max_{x \in [-1,1]} |\phi(x)|$$

$$\leq 1 \times \max_{x \in \mathbb{R}} |\phi(x)|.$$

⑦

Exercice 5 - Le peigne de Dirac

1. Pour $\varepsilon < \frac{1}{2}$, pour $n \neq m$, $x \mapsto \phi_1^\varepsilon(x-n)$ et $x \mapsto \phi_1^\varepsilon(x-m)$ sont à supports disjoints.



De plus, chaque fonction $x \mapsto \phi_1^\varepsilon(x-n) \in L^1(\mathbb{R})$.

Donc $\Psi^\varepsilon \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$

2. Soit $\varepsilon > 0$. On a :

$$\int_{n-\varepsilon}^{m+\varepsilon} \Psi^\varepsilon(x)\phi(x)\,dx = \int_{n-\varepsilon}^{m+\varepsilon}\left(\sum_{p\in\mathbb{Z}} \phi_1^\varepsilon(x-p)\right)\phi(x)\,dx$$

$$= \int_{n-\varepsilon}^{m+\varepsilon}\left(\sum_{p=n}^{m} \phi_1^\varepsilon(x-p)\right)\phi(x)\,dx$$

$$= \sum_{p=n}^{m}\int_{p-\varepsilon}^{p+\varepsilon} \phi_1^\varepsilon(x-p)\phi(x)\,dx$$

$$\underset{\text{sur } [p-\varepsilon,p+\varepsilon]}{\overset{x=p+\varepsilon t}{=}} \sum_{p=n}^{m}\int_{-1}^{1}(1-|t|)\phi(p+\varepsilon t)\,dt$$

Or, comme ϕ est continue (donc bornée sur $[-1,1]$), on a, par TCD :

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{-1}^{1}(1-|t|)\,\phi(p+\varepsilon t)\,dt = \phi(p)\int_{-1}^{1}(1-|t|)\,dt = \phi(p)$$

D'où :

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{n-\varepsilon}^{m+\varepsilon}\Psi^\varepsilon(x)\,\phi(x)\,dx = \sum_{p=n}^{m}\phi(p)$$

3. Pour pouvoir faire tendre n vers $-\infty$ et m vers $+\infty$, il faut que $\sum_{p\in\mathbb{Z}}|\phi(p)| < +\infty$. Donc il faut que ϕ décroisse suffisamment à l'infini. Ce critère est automatiquement vérifié si ϕ est à support compact.

Exercice 6 :

1. Soit $f \in C_c(\mathbb{R})$, $\operatorname{supp} f \subset [a,b]$. Alors $f \in L^1(\mathbb{R})$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$ fixé, $y \mapsto f(x-y)$ est aussi dans $L^1(\mathbb{R})$. Donc Tf est bien définie. De plus comme f est continue, $x \mapsto f(x-y)$ l'est aussi et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in [0,1],\ |f(x-y)| \leq M\, \mathbb{1}_{[a-1,b+1]}(y)$$

Or $y \mapsto M\,\mathbb{1}_{[a-1,b+1]}(y) \in L^1(\mathbb{R})$ et cette majoration est uniforme en x. Par le théorème de continuité sous le signe intégral, Tf est continue.

2. Comme $C_c(\mathbb{R})$ est dense dans $L^1(\mathbb{R})$, pour toute $f \in L^1(\mathbb{R})$, il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions continues à support compact qui converge vers f dans $L^1(\mathbb{R})$. Alors :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |Tf_n(x) - Tf(x)| \leq \int_0^1 |f_n(x-y) - f(x-y)|\,dy \leq \|f_n - f\|_1.$$

Et : $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |Tf_n(x) - Tf(x)| \leq \|f - f_n\|_1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Donc (Tf_n) converge uniformément vers Tf sur $\mathbb{R}$. Par a., chaque Tf_n est continue, donc Tf l'est aussi.

3. On a : $Tf = f * \mathbb{1}_{[0,1]}$. Si par l'absurde, il existe $u \in L^1(\mathbb{R})$ telle que : $\forall f \in L^1(\mathbb{R})$, $f * u = f$, alors :

$$Tu = u * \mathbb{1}_{[0,1]} = \mathbb{1}_{[0,1]}.$$

Mais, par 2., Tu est continue sur $\mathbb{R}$ alors que $\mathbb{1}_{[0,1]}$ ne l'est pas. Contradiction.

Exercice 7 :

1. L'espace $C_0^\infty(I)$ est dense dans $C_0(I)$ pour la norme infinie.
Plus précisement, soit $g \in C_0(I)$ avec $\operatorname{supp} g \subset [a,b] \subset I$. Alors, il existe une suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\varphi_n \in C_0^\infty(I)$ avec $\operatorname{supp} \varphi_n \subset [a';b'] \subset I$, et on peut même prescrire $[a,b] \subset [a';b']$, telle que (φ_n) converge uniformément vers g sur $[a,b]$. Alors :

$$\left| \int_I f(x)\,(g(x) - \varphi_n(x))\,dx \right| \leq \underbrace{\left(\int_{a'}^{b'} |f(x)|\,dx\right)}_{<\infty \text{ car } f \in L^1_{loc}(I)} \overbrace{\|g - \varphi_n\|_\infty}^{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Or : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_I f(x)\varphi_n(x)\,dx = 0$ par hypothèse.

Donc : $$\int_{[a,b]} f(x)g(x)\,dx = \int_I f(x)g(x)\,dx = 0.$$

2. Comme $f \in L^1([a,b])$, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $h_\varepsilon \in C_0(]a,b[)$ telle que : $$\int_a^b |f(x) - h_\varepsilon(x)|\,dx \leq \varepsilon.$$ Soit $g \in C_0(]a,b[)$.

Alors : $$\int_a^b h_\varepsilon(x)g(x)\,dx = \int_a^b (h_\varepsilon(x) - f(x))g(x)\,dx + \underbrace{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}_{=0 \text{ par } 1.}$$

D'où : $$\left|\int_a^b h_\varepsilon(x)g(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |h_\varepsilon(x) - f(x)|\,|g(x)|\,dx$$
$$\leq \varepsilon \|g\|_\infty.$$

(10)

3. Soit $\delta > 0$. On teste l'inégalité obtenue en 2. sur la fonction $g = \frac{h_\varepsilon}{\delta + |h_\varepsilon|}$. La présence du $\delta > 0$ nous assure la continuité de g.

On a : $\|g\|_\infty \leq 1$. De plus :

$$\int_a^b h_\varepsilon(x) g(x)\, dx = \int_a^b \frac{|h_\varepsilon(x)|^2}{\delta + |h_\varepsilon(x)|} dx \leq \varepsilon \|g\|_\infty \leq \varepsilon.$$

De là, par le théorème de convergence dominée ($|h_\varepsilon| \in L^1([a,b])$), on peut faire tendre δ vers 0 pour obtenir :

$$\int_a^b |h_\varepsilon(x)|\, dx = \int_a^b \lim_{\delta \to 0} \frac{|h_\varepsilon(x)|^2}{\delta + |h_\varepsilon(x)|} dx = \lim_{\delta \to 0} \int_a^b \frac{|h_\varepsilon(x)|^2}{\delta + |h_\varepsilon(x)|} dx \leq \varepsilon.$$

4. Il vient, d'après la définition de h_ε et d'après 3. :

$$\begin{aligned}\int_a^b |f(x)|\, dx &= \int_a^b |f(x) - h_\varepsilon(x) + h_\varepsilon(x)|\, dx \\ &\leq \int_a^b |f(x) - h_\varepsilon(x)|\, dx + \int_a^b |h_\varepsilon(x)|\, dx \\ &\leq 2\varepsilon.\end{aligned}$$

Donc $\int_a^b |f(x)|\, dx = 0$. Cela est valable pour tout $[a,b] \subset I$, donc $f = 0$ p.p sur I.