Sup Galilée — Année 2012-2013

Filière MACS 2

Mathématiques - Théorie Générale

①

Feuille de TD 2 : Distributions - Exemples, ordre et support.

Exercice 1 :

1. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. L'application $T : \varphi \mapsto \int_0^{+\infty} \varphi'(x)\log(x)\,dx$ est une forme linéaire sur $C_0^\infty(\mathbb{R})$. Soit $[a,b] \subset \mathbb{R}$ tel que $\operatorname{supp}\varphi \subset [a,b]$. Alors :

$$|\langle T,\varphi\rangle| = \left|\int_0^{+\infty}\varphi'(x)\log(x)\,dx\right| = \left|\int_{[a,b]\cap\mathbb{R}^+}\varphi'(x)\log x\,dx\right| \leq \|\varphi'\|_\infty \underbrace{\left|\int_{[a,b]\cap\mathbb{R}^+}\log x\,dx\right|}_{\text{Constante car } x\mapsto\log x \text{ est intégrable en } 0}$$

Donc T est une distribution d'ordre au plus 1.

2. a. Avec φ_n comme dans l'énoncé, on a :

$$|\langle T,\varphi_n\rangle| = \left|\int_{\frac{1}{2n}}^{2}\varphi'(x)\log x\,dx\right| = \left|\underbrace{\left[\varphi(x)\log x\right]_{\frac{1}{2n}}^{2}}_{=0} - \int_{\frac{1}{2n}}^{2}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx\right|$$

$$\geq \int_{\frac{1}{n}}^{1}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx = \int_{\frac{1}{n}}^{1}\frac{dx}{x} = \log n.$$

Donc : $\forall n \geq 1,\ |\langle T,\varphi_n\rangle| \geq \log n.\ \left(\xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty\right)$

b. Or, $\|\varphi_n\|_\infty = 1$ pour tout $n \geq 1$. Donc, avec $[a,b] = [0,2]$, il existe $[a,b] \subset \mathbb{R}$, tel que pour tout $C > 0$ et tout $n \geq 1$, il existe $\varphi_n \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\operatorname{supp}\varphi_n \subset [0,2]$ et : $|\langle T,\varphi_n\rangle| \geq C\|\varphi_n\|_\infty = C$. (car $\log n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$).

Donc T n'est pas d'ordre 0, elle est donc d'ordre 1.

3. Tout d'abord, si $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ avec $\operatorname{supp}\varphi \subset \mathbb{R}_-^*$, alors :

$$\langle T,\varphi\rangle = \int_0^{+\infty}\varphi'(x)\log x\,dx = 0 \quad \text{car } \varphi \equiv 0 \text{ sur } [0,+\infty[.$$

Donc $\operatorname{supp} T \subset \mathbb{R}_+$.

Réciproquement, soit $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et soit $\delta > 0$ tel que $]x_0-\delta, x_0+\delta[\subset \mathbb{R}_+^*$. Soit $\varphi \in C_0^\infty(]x_0-\delta, x_0+\delta[)$, $\varphi(x_0) = 1$ et $\varphi \geq 0$. Alors :

$$\langle T,\varphi\rangle = \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\varphi'(x)\log x\,dx = -\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx < 0. \text{ Donc } \langle T,\varphi\rangle \neq 0.$$

Donc $x_0 \in \operatorname{supp} T$ et $\mathbb{R}_+^* \subset \operatorname{supp} T$. Comme $\operatorname{supp} T$ est fermé, $\mathbb{R}_+ \subset \operatorname{supp} T$. Donc $\operatorname{supp} T = \mathbb{R}_+$.

Exercice 2 – Valeur principale de $\frac{1}{x}$:

1. On a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \varphi(0) + \int_0^x \varphi'(t)dt$. On pose $t = xu$.

Alors : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \varphi(0) + x\int_0^1 \varphi'(xu)\,du$.

Posons $\psi(x) = \int_0^1 \varphi'(xu)du$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. Alors, comme $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ et $[0,1]$ est compact, $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ par le théorème de dérivation sous le signe $\int$ et on a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \varphi(0) + x\,\psi(x)$.

2. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $[-a,a] \subset \mathbb{R}$ et $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\operatorname{supp}\varphi \subset [-a,a]$.

On a : $\displaystyle\int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}dx = \int_{a \geq |x| > \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}dx = \int_{a \geq |x| > \varepsilon} \frac{\varphi(0)}{x} + \psi(x)\,dx$

$$= \underbrace{\int_{a \geq |x| > \varepsilon} \frac{\varphi(0)}{x}dx}_{=0 \text{ par imparité}} + \int_{a \geq |x| > \varepsilon} \psi(x)dx \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \int_{a \geq |x| \geq 0} \psi(x)dx \text{ car } \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}).$$

Donc la limite existe et vaut $\displaystyle\int_{a \geq |x| \geq 0} \psi(x)dx$.

3. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\operatorname{supp}\varphi \subset [-a,a]$. Alors : $\varphi \mapsto \displaystyle\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}dx$ est une forme linéaire sur $C_0^\infty(\mathbb{R})$ et : $\displaystyle |\langle vp(\tfrac{1}{x}), \varphi \rangle| = \left|\int_{-a}^a \psi(x)dx\right| = \left|\int_{-a}^a \left(\int_0^1 \varphi'(xu)du\right)dx\right|$

$$\leq \|\varphi'\|_\infty \left|\int_{-a}^a \left(\int_0^1 du\right)dx\right| = 2a\|\varphi'\|_\infty.$$

Donc $vp(\frac{1}{x})$ est une distribution d'ordre au plus 1.

4. Soient $\varepsilon > 0$ et $n \geq 1$ assez grand pour que $\varepsilon \geq \frac{1}{2n}$.

$$\langle vp(\tfrac{1}{x}), \varphi_n \rangle \geq \int_\varepsilon^2 \frac{\varphi_n(x)}{x}dx = \int_{\frac{1}{2n}}^2 \frac{\varphi_n(x)}{x}dx \geq \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{\varphi_n(x)}{x}dx = \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{dx}{x} = \log n.$$

Alors en faisant tendre n vers l'infini : $|\langle vp(\frac{1}{x}), \varphi_n \rangle| \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$, et $\|\varphi_n\|_\infty = 1$ pour tout n.

Donc $vp(\frac{1}{x})$ n'est pas d'ordre 0. C'est donc une distribution d'ordre 1.

③ Exercice 3

1. On a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \varphi(0) + \int_0^x \varphi'(t)\,dt$. On pose $t = xu$.

Alors : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \varphi(0) + x\int_0^1 \varphi'(xu)\,du$.

Posons $\psi(x) = \int_0^1 \varphi'(xu)\,du$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. Alors, comme $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ et $[0,1]$ est compact, $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$ par le théorème de dérivation sous le signe $\int$ et on a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \varphi(0) + x\,\psi(x)$.

2. • Soient $\varepsilon > 0$ et $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. On a :

$$\mathrm{Re}\left(\int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x - i\varepsilon}\,dx\right) = \mathrm{Re}\left(\int_{\mathbb{R}} \frac{(x+i\varepsilon)\varphi(x)}{x^2+\varepsilon^2}\,dx\right) = \int_{\mathbb{R}} \frac{x\varphi(x)}{x^2+\varepsilon^2}\,dx$$

Soit $[-a,a] \subset \mathbb{R}$, $a>0$, tel que $\mathrm{supp}\,\varphi \subset [-a,a]$.

Alors :
$$\mathrm{Re}\left(\int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x - i\varepsilon}\,dx\right) = \int_{-a}^{a} \frac{x\varphi(x)}{x^2+\varepsilon^2}\,dx$$

On écrit $\varphi(x) = \varphi(0) + x\,\psi(x)$ avec $\psi(x) = \int_0^1 \varphi'(xu)\,du$, $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ et $\mathrm{supp}\,\psi \subset [-a,a]$. Alors :

$$\mathrm{Re}\left(\int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x - i\varepsilon}\,dx\right) = \underbrace{\int_{-a}^{a} \frac{x\varphi(0)}{x^2+\varepsilon^2}\,dx}_{=0 \text{ par imparité}} + \int_{-a}^{a} \frac{x^2\psi(x)}{x^2+\varepsilon^2}\,dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \frac{x^2\psi(x)}{x^2+\varepsilon^2}\,\mathbb{1}_{[-a,a]}(x)\,dx$$

On : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{x^2\psi(x)}{x^2+\varepsilon^2}\mathbb{1}_{[-a,a]}(x) \xrightarrow[\varepsilon \to 0^+]{} \psi(x)\,\mathbb{1}_{[-a,a]}(x)$

et $\forall \varepsilon > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, $\left|\dfrac{x^2\psi(x)}{x^2+\varepsilon^2}\mathbb{1}_{[-a,a]}(x)\right| \leq |\psi(x)|\,\mathbb{1}_{[-a,a]}(x) \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$.

④

Donc, par le théorème de convergence dominée, on a:

$$\mathrm{Re}\left(\int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x-i\varepsilon}\,dx\right) \xrightarrow[\varepsilon\to 0^+]{} \int_{-a}^{a} \psi(x)\,dx = \langle vp(\tfrac{1}{x}), \varphi\rangle$$

Donc la limite existe et vaut $\langle vp(\frac{1}{x}), \varphi\rangle$.

- Soient $\varepsilon>0$ et $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. On a; pour $[-a,a]\subset\mathbb{R}$, $a>0$, tel que $\mathrm{supp}\,\varphi \subset [-a,a]$,

$$\mathrm{Im}\left(\int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x-i\varepsilon}\,dx\right) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\varepsilon\,\varphi(x)}{x^2+\varepsilon^2}\,dx = \int_{-a}^{a} \frac{\varepsilon\,\varphi(x)}{x^2+\varepsilon^2}\,dx$$

Si on pose $y = x/\varepsilon$, alors $dx = \varepsilon\,dy$ et:

$$\mathrm{Im}\left(\int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x-i\varepsilon}\,dx\right) = \int_{-a/\varepsilon}^{a/\varepsilon} \frac{\varepsilon\,\varphi(\varepsilon y)}{(\varepsilon y)^2+\varepsilon^2}\,\varepsilon\,dy = \int_{-a/\varepsilon}^{a/\varepsilon} \frac{\varphi(\varepsilon y)}{1+y^2}\,dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(\varepsilon y)}{1+y^2}\,\mathbb{1}_{[-a/\varepsilon,\, a/\varepsilon]}(y)\,dy$$

Or, $\forall \varepsilon>0, \forall y\in\mathbb{R}$, $\left|\frac{\varphi(\varepsilon y)}{1+y^2}\,\mathbb{1}_{[-a/\varepsilon,\, a/\varepsilon]}(y)\right| \leq \frac{\|\varphi\|_\infty}{1+y^2} \in L^1(\mathbb{R})$

et $\forall y\in\mathbb{R}$, $\frac{\varphi(\varepsilon y)}{1+y^2}\,\mathbb{1}_{[-a/\varepsilon,\, a/\varepsilon]}(y) \xrightarrow[\varepsilon\to 0^+]{} \frac{\varphi(0)}{1+y^2}$

Par le théorème de convergence dominée :

$$\mathrm{Im}\left(\int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x-i\varepsilon}\,dx\right) \xrightarrow[\varepsilon\to 0^+]{} \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(0)}{1+y^2}\,dy = \pi\varphi(0) = \pi\langle\delta_0, \varphi\rangle.$$

Donc la limite existe et vaut $\pi\langle\delta_0,\varphi\rangle$.

3. On en déduit que l'expression $\langle T,\varphi\rangle = \lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x-i\varepsilon}\,dx$ est bien définie et vaut: $\langle T,\varphi\rangle = \langle vp(\frac{1}{x}),\varphi\rangle + i\pi\langle\delta_0,\varphi\rangle$.

Soit encore $T = vp(\frac{1}{x}) + i\pi\delta_0$ qui est une distribution d'ordre 1.

⑤ Exercice 4 :

1. Soit $[-a,a]^2 \subset \mathbb{R}^2$ $(a>0)$ un compact et soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, $\operatorname{supp}\varphi \subset [-a,a]^2$.

Alors:

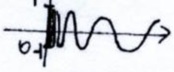
$$|\langle T,\varphi\rangle| = \left|\int_0^{+\infty} \left(\varphi\left(\tfrac{1}{t^2}, \sin t\right) - \varphi(0,\sin t)\right) dt\right| = \left|\int_0^{+\infty} \underbrace{\int_0^1 \partial_x \varphi\left(\tfrac{s}{t^2}, \sin t\right)\frac{ds}{t^2}}_{=\left[\varphi\left(\frac{s}{t^2},\sin t\right)\right]_0^1} dt\right|$$

$$\leq \int_{\frac{1}{\sqrt{a}}}^{+\infty} \left|\int_0^1 \partial_x \varphi\left(\tfrac{s}{t^2}, \sin t\right)\right| ds \,\frac{dt}{t^2}$$

$$\leq \|\partial_x \varphi\|_\infty \int_{\frac{1}{\sqrt{a}}}^{+\infty} \frac{dt}{t^2} = \|\partial_x\varphi\|_\infty \left[-\frac{1}{t}\right]_{\frac{1}{\sqrt{a}}}^{+\infty} = \sqrt{a}\,\|\partial_x \varphi\|_\infty .$$

Comme T est une forme linéaire sur $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, cette estimée de $|\langle T,\varphi\rangle|$ nous dit que T est une distribution d'ordre au plus 1

2. Montrons que si $S = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y = \sin\frac{1}{\sqrt{x}},\ x>0\right\}$, alors $\operatorname{supp} T = \overline{S} = S \cup (\{0\}\times[-1,1])$.



$\overline{S}$

- Soit $x_0 \notin \overline{S}$. Alors, il existe $\varepsilon>0$, $\overline{B}(x_0,\varepsilon) \subset \overline{S}^c$.

  Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, $\operatorname{supp}\varphi \subset \overline{B}(x_0,\varepsilon)$. Alors par définition de T, $\langle T,\varphi\rangle = 0$ car: $\forall t>0$, $\left(\frac{1}{t^2},\sin t\right) \notin \overline{B}(x_0,\varepsilon)$ et $(0,\sin t)\notin \overline{B}(x_0,\varepsilon)$

  Donc $x_0 \notin \operatorname{supp} T$ et $\operatorname{supp} T \subset \overline{S}$.

- Réciproquement, soit $x_0 \in S$ et soit $\varepsilon>0$ tel que $B(x_0,\varepsilon)\cap(\{0\}\times[-1,1]) = \emptyset$.

  Soit $\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ telle que $\operatorname{supp}\varphi \subset B(x_0,\varepsilon)$, $\varphi = 1$ sur $\overline{B}(x_0,\frac{\varepsilon}{2})$ et $\varphi \geq 0$. Alors:

$$\langle T,\varphi\rangle = \int_0^{+\infty} \varphi\left(\tfrac{1}{t^2},\sin t\right) dt \geq t_2 - t_1 > 0$$

  où t_1 est tel que $x_0 = \left(\frac{1}{t_1^2}, \sin t_1\right)$ et $t_2 = \inf\left\{t>t_1,\ \left(\frac{1}{t^2},\sin t\right)\notin \overline{B}(x_0,\frac{\varepsilon}{2})\right\}$

  Alors, T est non nulle au voisinage de x_0 et $S \subset \operatorname{supp} T$. Comme $\operatorname{supp} T$ est fermé, $\overline{S}\subset \operatorname{supp} T$ et finalement, $\operatorname{supp} T = \overline{S}$.

Exercice 5 :

Supposons par l'absurde qu'il existe $f \in L^1_{loc}(I)$ telle que $\delta_{x_0} = T_f$.

Alors : $\forall \varphi \in C_0^\infty(I)$, $\int_I f(x)\varphi(x)\,dx = \varphi(x_0)$ $(*)$.

En particulier : $\forall \varphi \in C_0^\infty(I)$, $x_0 \notin \operatorname{supp}\varphi$, $\int_I f(x)\varphi(x)\,dx = 0$.

Soit $J = I \cap \{x < x_0\}$ et supposons $\operatorname{supp}\varphi \subset J$.

Alors $\int_J f\varphi = 0$ et $f = 0$ sur J d'après l'exercice 4 de la Feuille de TD 1.

De même, $f = 0$ sur $J' = I \cap \{x > x_0\}$. Comme $I = J \cup \{x_0\} \cup J'$, $f = 0$ presque partout sur I ($\mathrm{Leb}(\{x_0\}) = 0$) et :

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(I), \quad \int_I f(x)\varphi(x)\,dx = 0 \quad (**),$$

Mais, si $\varphi \in C_0^\infty(I)$ est telle que $\varphi(x_0) \neq 0$, alors $(**)$ contredit $(*)$.

Donc, il ne peut exister $f \in L^1_{loc}(I)$ telle que $\delta_{x_0} = T_f$.

Exercice 6 - Distribution d'ordre infini.

- $T : \varphi \mapsto \sum_{p=0}^{\infty} \varphi^{(p)}(p)$ est une forme linéaire sur $C_0^\infty(\mathbb{R})$, continue.

Donc $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. En effet si $[-a,a] \subset \mathbb{R}$, $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ avec $\operatorname{supp}\varphi \subset [-a,a]$, en posant $p_0 = E(a)+1$, on a :

$$|\langle T,\varphi\rangle| = \left|\sum_{p=0}^{+\infty} \varphi^{(p)}(p)\right| = \left|\sum_{p=0}^{p_0} \varphi^{(p)}(p)\right| \leq \underbrace{\sum_{p=0}^{p_0} \|\varphi^{(p)}\|_\infty}_{\text{somme finie}}.$$

- Supposons par l'absurde que T est d'ordre fini m.

Soit $\psi_0 \in C_0^\infty(]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[)$, égale à 1 sur $[-\frac{1}{4},\frac{1}{4}]$, positive. Soit $\lambda > 1$

Posons $\psi(x) = \dfrac{x^{m+1}}{(m+1)!}\psi_0(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$ et $\varphi(x) = \psi(\lambda(x-(m+1)))$.

On considère le compact $K = [m+\frac{1}{2}, m+\frac{3}{2}]$ de $\mathbb{R}$. Comme $\lambda > 1$, φ est à support dans K et est C^∞. D'autre part, par la formule de Leibnitz, on a : $\psi^{(m+1)}(0) = \psi_0(0) = 1$.

Puis, comme $\operatorname{supp}\varphi \subset K$, on a : $\langle T,\varphi\rangle = \varphi^{(m+1)}(m+1) = \lambda^{m+1}\psi^{(m+1)}(0) = \lambda^{m+1}$.

D'autre part, pour $j \leq m$, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad |\varphi^{(j)}(x)| \leq \lambda^j \sup|\psi^{(j)}(x)| \leq \lambda^j \|\psi^{(j)}\|_\infty.$$

Or, T est supposée d'ordre m, donc pour $K = [m+\frac{1}{2}, m+\frac{3}{2}]$, il existe $C_K \in \mathbb{R}_+^*$ telle que : $|\langle T,\varphi\rangle| \leq C_K \sum_{0\leq j\leq m} \|\varphi^{(j)}\|_\infty$, soit ici :

$$\lambda^{m+1} \leq C_K \sum_{j=0}^{m} \lambda^j \|\psi^{(j)}\|_\infty \leq C_K\left(\sum_{j=0}^{m}\|\psi^{(j)}\|_\infty\right)\lambda^m$$

Or, cela est impossible si $\lambda \to +\infty$ car on a : $\lambda \leq C_K\left(\sum_{j=0}^{m}\|\psi^{(j)}\|_\infty\right) < +\infty$.

Donc T ne peut pas être d'ordre fini.

Exercice 7

1. Soient $\varepsilon>0$ et $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$. Soit $M\geq 0$ tel que
$$\operatorname{supp}\varphi \subset \{x : |x|\leq M\}.$$
La fonction $u\varphi$ est alors intégrable sur l'ensemble $\{x : |x|\geq \varepsilon\}$.

Posons $x = r\omega$ où $r\in[\varepsilon,+\infty[$ et $\omega\in S^{m-1}$. Alors :

$$\forall \varepsilon>0,\quad I_\varepsilon = \int_{|x|\geq\varepsilon} u(x)\varphi(x)\,dx = \int_\varepsilon^M \int_{S^{m-1}} u(r\omega)\varphi(r\omega) r^{m-1}\,dr\,d\omega$$
$$= \int_\varepsilon^M \frac{1}{r}\left(\int_{S^{m-1}} u(\omega)\varphi(r\omega)\,d\omega\right)dr$$

d'après l'hypothèse faite sur u. On applique ensuite la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 1 à φ :
$$\varphi(r\omega) = \varphi(0) + \sum_{j=1}^m r\omega_j \int_0^1 \psi_j(tr\omega)\,dt \quad \text{avec } \psi_j = \frac{\partial\varphi}{\partial x_j}.$$

D'où :
$$I_\varepsilon = \underbrace{\varphi(0)\left(\int_\varepsilon^M \frac{dr}{r}\right)\left(\int_{S^{m-1}} u(\omega)\,d\omega\right)}_{A_\varepsilon} + \underbrace{\sum_{j=1}^m \int_\varepsilon^M \int_{S^{m-1}} \int_0^1 \omega_j u(\omega)\psi_j(tr\omega)\,dt\,dr\,d\omega}_{B_\varepsilon}$$

Or, comme $u\in C^0(\mathbb{R}^m\setminus\{0\})$, il existe pour chaque $j\in\{1,\dots,m\}$ une constante $C_j>0$ telle que :

$$\sup_{r\in[0,M]}\ \sup_{\omega\in S^{m-1}}\ \sup_{t\in[0,1]} |\omega_j u(\omega)\psi_j(tr\omega)| \leq C_j$$

Par convergence dominée, B_ε admet une limite lorsque ε tend vers 0. Ainsi, I_ε admet une limite lorsque ε tend vers 0 si et seulement si A_ε en admet une.

Si $\int_{S^{n-1}} u(\omega)d\omega = 0$, alors $A_\varepsilon = 0$ pour toute $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ et tout $\varepsilon > 0$.

Si $\int_{S^{n-1}} u(\omega)d\omega \neq 0$, A_ε n'admet pas de limite pour les φ telles que $\varphi(0) \neq 0$ car $\lim\limits_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^M \frac{dr}{r} = +\infty$.

D'où l'équivalence voulue.

2. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. On a :

$$\begin{aligned}
|\langle T,\varphi\rangle| &= \left| \sum_{j=1}^n \int_0^M \int_{S^{n-1}} \int_0^1 \omega_j u(\omega) \psi_j(tr\omega)\, dt\, dr\, d\omega \right| \\
&\leq \sum_{j=1}^n \int_0^M \int_{S^{n-1}} \int_0^1 |\omega_j u(\omega) \psi_j(tr\omega)|\, dt\, dr\, d\omega \\
&\leq C \sum_{j=1}^n \sup_{|x| \leq M} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right| \quad , C \text{ constante indépendante de } \varphi.
\end{aligned}$$

Donc T est une distribution d'ordre au plus 1.