Sup Galilée

Filière MACS 2

Mathématiques - Théorie Générale

Année 2012 - 2013

Feuille de TD3 : Distributions - Dérivation

(1)

Exercice 1

1. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Alors : $\langle H', \varphi \rangle = -\langle H, \varphi' \rangle$

$$= -\int_0^\infty 1 \times \varphi'(x)\, dx$$

$$= -[\varphi(x)]_0^\infty + \int_0^\infty 0\, dx$$

Donc $H' = \delta_0$

$$= \varphi(0) = \langle \delta_0, \varphi \rangle$$

2. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Alors : $\langle (\log|x|)', \varphi \rangle = -\langle \log|x|, \varphi' \rangle$

$\operatorname{supp}\varphi \subset [-A, A]$.

$$= -\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{A \geq |x| \geq \varepsilon} \log|x|\varphi'(x)\, dx$$

Or : $$\int_{A \geq |x| \geq \varepsilon} \log|x|\varphi'(x)\, dx = -\int_{A \geq |x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx + (\log \varepsilon)[\varphi(-\varepsilon) - \varphi(\varepsilon)]$$

Or, en écrivant Taylor à l'ordre 1 pour φ, on obtient :

$$\varphi(\varepsilon) = \varphi(0) + \varepsilon\, \psi(\varepsilon) \text{ avec } \psi(\varepsilon) \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} 0$$

$$\varphi(-\varepsilon) = \varphi(0) - \varepsilon\, \tilde{\psi}(\varepsilon) \text{ avec } \tilde{\psi}(\varepsilon) \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} 0$$

Donc : $(\log \varepsilon)[\varphi(-\varepsilon) - \varphi(\varepsilon)] = -(\varepsilon \log \varepsilon)(\psi(\varepsilon) + \tilde{\psi}(\varepsilon))$

Or $\varepsilon \log \varepsilon \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} 0$ donc $(\log \varepsilon)[\varphi(-\varepsilon) - \varphi(\varepsilon)] \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} 0$

et $\langle (\log|x|)', \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx = vp\left(\frac{1}{x}\right)$.

Donc : $(\log|x|)' = vp\left(\frac{1}{x}\right)$.

3. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, supp $\varphi \subset [-A,A]$. Alors:

$$\langle vp(\tfrac{1}{x})', \varphi \rangle = -\langle vp(\tfrac{1}{x}), \varphi' \rangle = -\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{A \geq |x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi'(x)}{x}\,dx$$

Or : $$-\int_{A \geq |x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi'(x)}{x}\,dx = \left[\frac{\varphi(x)}{x}\right]_{-A}^{-\varepsilon} + \left[\frac{\varphi(x)}{x}\right]_{\varepsilon}^{A} + \int_{A \geq |x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2}\,dx$$

$$= -\frac{\varphi(-\varepsilon)}{\varepsilon} - \frac{\varphi(\varepsilon)}{\varepsilon} + \int_{A \geq |x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2}\,dx$$

Or, $\varphi(\varepsilon) = \varphi(0) + \varepsilon \psi(\varepsilon)$ avec $\psi(\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0$

$\varphi(-\varepsilon) = \varphi(0) - \varepsilon \tilde{\psi}(\varepsilon)$ avec $\tilde{\psi}(\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0$

Donc : $$-\frac{\varphi(\varepsilon) + \varphi(-\varepsilon)}{\varepsilon} = -2\frac{\varphi(0)}{\varepsilon} + \underbrace{[\psi(\varepsilon) + \tilde{\psi}(-\varepsilon)]}_{\downarrow \varepsilon \to 0 \; 0}$$

D'où : $$\langle vp(\tfrac{1}{x})', \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\int_{|x| > \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2}\,dx - \frac{2\varphi(0)}{\varepsilon} \right] := Pf\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Exercice 2.

Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Soit $R>0$ tel que $\operatorname{supp}\varphi \subset [-R,R]$.

On a :

$$\langle PT,\varphi\rangle = \langle T'',\varphi\rangle + a\langle T',\varphi\rangle + b\langle T,\varphi\rangle$$

$$= \langle T,\varphi''\rangle - a\langle T,\varphi'\rangle + b\langle T,\varphi\rangle$$

$$= -\int_{\mathbb{R}} h(x)\varphi''(x)\,dx + a\int_{\mathbb{R}} h(x)\varphi'(x)\,dx - b\int_{\mathbb{R}} h(x)\varphi(x)\,dx$$

$$= -\int_{-R}^{R} h(x)\varphi''(x)\,dx + a\int_{-R}^{R} h(x)\varphi'(x)\,dx - b\int_{-R}^{R} h(x)\varphi(x)\,dx$$

$$= -\int_{-R}^{0} f(x)\varphi''(x)\,dx - \int_0^R g(x)\varphi''(x)\,dx + a\left(\int_{-R}^{0} f(x)\varphi'(x)\,dx + \int_0^R g(x)\varphi'(x)\,dx\right)$$

$$-b\left(\int_{-R}^{0} f(x)\varphi(x)\,dx + \int_0^R g(x)\varphi(x)\,dx\right)$$

Puis, on intègre par parties pour obtenir :

$$\langle PT,\varphi\rangle = -\left(\left[f(x)\varphi'(x)\right]_{-R}^{0} - \int_{-R}^{0} f'(x)\varphi'(x)\,dx\right) - \left(\left[g(x)\varphi'(x)\right]_0^R - \int_0^R g'(x)\varphi'(x)\,dx\right)$$

$$+a\left(\left[f(x)\varphi(x)\right]_{-R}^{0} - \int_{-R}^{0} f'(x)\varphi(x)\,dx + \left[g(x)\varphi(x)\right]_0^R - \int_0^R g'(x)\varphi(x)\,dx\right)$$

$$-b\left(\int_{-R}^{0} f(x)\varphi(x)\,dx + \int_0^R g(x)\varphi(x)\,dx\right)$$

④

$$= -\Big(f(0)\varphi'(0) - \cancel{f(-R)\times 0} - \Big([f'(x)\varphi(x)]_{-R}^{0} - \int_{-R}^{0} f''(x)\varphi(x)dx \Big)\Big)$$

$$- \Big(\cancel{g(R)\times 0} - g(0)\varphi'(0) - \Big([g'(x)\varphi(x)]_{0}^{R} - \int_{0}^{R} g''(x)\varphi(x)dx \Big)\Big)$$

$$+ a\Big(f(0)\varphi(0) - \cancel{f(0)\times 0} - \int_{-R}^{0} f'(x)\varphi(x)dx + \cancel{g(R)\times 0} - g(0)\varphi(0) - \int_{0}^{R} g'(x)\varphi(x)dx$$

$$- b\Big(\int_{-R}^{0} f(x)\varphi(x)dx + \int_{0}^{R} g(x)\varphi(x)dx \Big)$$

$$= -f(0)\cancel{\varphi'(0)} + f'(0)\varphi(0) + g(0)\cancel{\varphi'(0)} - g'(0)\varphi(0) - a\,g(0)\varphi(0) + a f(0)\varphi(0)$$

$$- \int_{-R}^{0} f''(x)\varphi(x)dx - a\int_{-R}^{0} f'(x)\varphi(x)dx - b\int_{-R}^{0} f(x)\varphi(x)dx$$

$$- \int_{0}^{R} g''(x)\varphi(x)dx - a\int_{0}^{R} g'(x)\varphi(x)dx - b\int_{0}^{R} g(x)\varphi(x)dx$$

D'où, en utilisant les propriétés 1., 2. et 3. :

$$\langle PT, \varphi\rangle = \varphi'(0)\big(\cancel{f(0)} - f(0)\big) + a\varphi(0)\big(\cancel{f(0)} - f(0)\big) + \varphi(0)\big(\underbrace{f'(0) - g'(0)}_{=1}\big)$$

$$- \int_{-R}^{0} \underbrace{\big(f''(x) + af'(x) + bf(x)\big)}_{=(Pf)(x)=0}\varphi(x)dx - \int_{0}^{R} \underbrace{\big(g''(x) + ag'(x) + bg(x)\big)}_{=(Pg)(x)=0}\varphi(x)dx$$

$$= \varphi(0) = \langle \delta_0, \varphi\rangle .$$

Donc, on a bien : $\underline{PT = \delta_0}$.

Exercice 3 :

1. Comme l'équation différentielle $2xu'-u=0$ est singulière en 0, on cherche ses solutions localement intégrables sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$.

Sur $\mathbb{R}_+^*$ on trouve comme solutions : $u(x)=C_1\sqrt{x}$

Sur $\mathbb{R}_-^*$ on trouve comme solutions : $u(x)=C_2\sqrt{x}$.

On note $x_+=\max(x,0)$ et $x_-=\max(-x,0)$.

Les fonctions localement intégrables $u : x\mapsto C_1\sqrt{x_+}+C_2\sqrt{x_-}$ sont donc solutions de $2xu'-u=0$.

2.a Les distributions associées aux fonctions $u : x\mapsto C_1\sqrt{x_+}+C_2\sqrt{x_-}$ sont solutions de $2xT'-T=0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Puis, soit $T\in\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ une solution de $2xT'-T=0$. Soit T_1 sa restriction à $C_0^\infty(\mathbb{R}_+^*)$. Soit $S_1=\frac{T_1}{\sqrt{x}}$.

Alors : $S_1' = \frac{T_1'}{\sqrt{x}} - \frac{T_1}{2x\sqrt{x}} = \frac{2xT_1'-T_1}{2x\sqrt{x}} = 0$

Comme S_1 est définie sur un intervalle (convexe), il existe $C_1\in\mathbb{R}$ telle que $S_1=C_1$. D'où $T_1=C_1\sqrt{x_+}$.

De même : $T_2=C_2\sqrt{x}$.

6

b. Soit $S = T - T_1 - T_2$. Si $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+^*)$, $\langle S,\varphi\rangle = \langle T,\varphi\rangle - \langle T_1,\varphi\rangle - \langle T_2,\varphi\rangle$

$$= \langle T_1,\varphi\rangle - \langle T_1,\varphi\rangle - 0$$
$$= 0$$

Et si $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}_-^*)$, $\langle S,\varphi\rangle = \langle T,\varphi\rangle - \langle T_1,\varphi\rangle - \langle T_2,\varphi\rangle$

$$= \langle T_2,\varphi\rangle - 0 - \langle T_2,\varphi\rangle$$
$$= 0.$$

Donc $\mathbb{R}_+^* \subset (\operatorname{supp} S)^c$ et $\mathbb{R}_-^* \subset (\operatorname{supp} S)^c$, donc $\operatorname{supp} S \subset \mathbb{R}_-$ et $\operatorname{supp} S \subset \mathbb{R}_+$.

Donc : $\operatorname{supp} S \subset \{0\}$.

c. Soit $R = \sum_{k=0}^{p} a_k \delta^{(k)}$, $a_k \in \mathbb{C}$. Si $R = 0$ alors $2xR' - R = 0$.

Réciproquement, supposons que $2xR' - R = 0$ et montrons que $R = 0$.

Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ et $k \geq 1$:

$$\langle 2x(\delta^{(k)})', \varphi\rangle = -\langle \delta^{(k)}, (2x\varphi)'\rangle$$
$$= -\langle \delta^{(k)}, 2\varphi\rangle - \langle \delta^{(k)}, 2x\varphi'\rangle$$
$$= 2(-1)^{k+1}\left(2\varphi^{(k)}(0) + (2x\varphi')^{(k)}(0)\right)$$
$$= 2(-1)^{k+1}(k+1)\varphi^{(k)}(0)$$

Donc $2xR' - R = \sum_{k=0}^{p} \left(2(-1)^{k+1}(k+1) - 1\right) a_k \delta^{(k)}$

Or $2xR' - R = 0$, donc $a_k = 0$ pour tout k et $R = 0$.

d. Comme par b., $\operatorname{supp} S \subset \{0\}$, S s'écrit $S = \sum_{k=0}^{p} a_k \delta^{(k)}$.

Si T est solution de $2xT' - T = 0$, alors S aussi et donc par c., $S = 0$.

Ainsi, $T = T_1 + T_2 = C_1\sqrt{x_+} + C_2\sqrt{x_-}$ ~~sont~~ les solutions de $2xT' - T = 0$.

3. La forme du second membre δ_0 nous incite à chercher une solution particulière qui soit combinaison linéaire de dérivées de masses de Dirac en 0. Or, par c., il suffit de prendre une masse de Dirac en 0 et en injectant cette distribution $a_0\delta_0$ dans l'équation, on en tire : $(2(-1)(1) - 1)a_0 = 1$ soit $a_0 = -\frac{1}{3}$.

Donc les solutions de l'équation différentielle $2xT' - T = \delta_0$ sont les

$$C_1\sqrt{x_+} + C_2\sqrt{x_-} - \frac{1}{3}\delta_0.$$

(7) Exercice 4

1. Soit K un compact de $\mathbb{R}^2$ et $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, $\operatorname{supp}\varphi \subset K$.

Posons $K_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid (x,h(x)) \in K\}$ qui est compact car K l'est et h est un C^1-difféo

Alors : $|\langle T,\varphi\rangle| \leq \left(\int_{K_1} dx\right) \sup_{(x,y)\in K} |\varphi(x,y)| \leq C\|\varphi\|_\infty$.

Donc T est une distribution d'ordre au plus 0 donc d'ordre 0 sur $\mathbb{R}^2$.

2. Soit D la courbe $D = \{(x,h(x)) \mid x \in \mathbb{R}\}$. Montrons que $\operatorname{supp} T = D$.

Tout d'abord, soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, $\operatorname{supp}\varphi \subset \mathbb{R}^2 \setminus D$. Alors $\varphi(x,h(x)) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $\langle T,\varphi\rangle = 0$. Donc $D^c \subset (\operatorname{supp} T)^c$ et $\operatorname{supp} T \subset D$.

Réciproquement, montrons que tout point $M_0 = (x_0, h(x_0)) \in D$ est dans $\operatorname{supp} T$.

Soit $\delta > 0$. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ une fonction positive, avec $\operatorname{supp}\varphi \subset B(M_0,\delta)$ et $\varphi(x,y) = 1$ pour tout $(x,y) \in B(M_0, \delta/2)$. Soit $K_\delta = \{x \in \mathbb{R} \mid (x,h(x)) \in B(M_0,\delta)\}$.

$$|\langle T,\varphi\rangle| = \left|\int_{K_\delta} \varphi(x,h(x))\,dx\right| \geq \int_{K_{\delta/2}} \underbrace{\varphi(x,h(x))}_{=1}\,dx$$
$$\geq \mathrm{Leb}(K_{\delta/2}) > 0$$

où $K_{\delta/2} = \{x \in \mathbb{R} \mid (x,h(x)) \in B(M_0,\delta/2)\}$ est de mesure de Lebesgue strictement positive. Donc T est non nulle au voisinage de M_0, donc $M_0 \in \operatorname{supp} T$.

Ainsi $D \subset \operatorname{supp} T$ et $D = \operatorname{supp} T$.

3. Si T est la distribution T_f associée à une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$ f, alors $\operatorname{supp} T = \operatorname{supp} f$ où $\operatorname{supp} f$ est le support de f au sens des fonctions continues. Alors, f serait nulle en dehors de D qui est de mesure nulle dans $\mathbb{R}^2$, donc T_f serait nulle. Or T est non nulle.

4. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$. Soit $\phi(x) = \varphi(x,h(x))$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Alors : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\phi'(x) = \dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(x,h(x)) + h'(x)\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}(x,h(x))$

D'où : $\langle \partial_x T + h'(x)\partial_y T, \varphi\rangle = -\int_{\mathbb{R}} (\partial_x\varphi + h'(x)\partial_y\varphi)(x,h(x))\,dx = -\int_{\mathbb{R}} \phi'(x)\,dx$
$= [\phi(x)]_{-\infty}^{+\infty} = 0$ car ϕ est à support compact.

Donc : $(\partial_x + h'(x)\partial_y)T = 0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$.

Exercice 5 - Equation de la chaleur

1. On a, $\forall (x,t)\in\mathbb{R}^2$, $0 \leq E(x,t) \leq \frac{H(t)}{\sqrt{4\pi t}} \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$.

Donc $E \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$ et E définit une distribution sur $\mathbb{R}^2$.

2. Soient $t>0$ et $x\in\mathbb{R}$:

On a : $$\partial_t\left(\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}\right) = -\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{4\pi}}\frac{1}{t^{3/2}}e^{-\frac{x^2}{4t}} + \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\frac{x^2}{4t^2}e^{-\frac{x^2}{4t}}$$
$$= \left[-\frac{1}{4\sqrt{\pi}\,t^{3/2}} + \frac{x^2}{8\sqrt{\pi}\,t^{5/2}}\right]e^{-\frac{x^2}{4t}}$$

et $$\partial^2_{xx}\left(\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}\right) = \partial_x\left(\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\left(-\frac{2x}{4t}\right)e^{-\frac{x^2}{4t}}\right) = -\partial_x\left(\frac{x}{4\sqrt{\pi}\,t^{3/2}}e^{-\frac{x^2}{4t}}\right)$$
$$= -\frac{1}{4\sqrt{\pi}\,t^{3/2}}e^{-\frac{x^2}{4t}} - \frac{x}{4\sqrt{\pi}\,t^{3/2}}\left(-\frac{x}{2t}\right)e^{-\frac{x^2}{4t}}$$
$$= \left[-\frac{1}{4\sqrt{\pi}\,t^{3/2}} + \frac{x^2}{8\sqrt{\pi}\,t^{5/2}}\right]e^{-\frac{x^2}{4t}}$$
$$= \partial_t\left(\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}\right)$$

3. a. Soit $\varepsilon>0$. Soit $\varphi\in C^\infty_0(\mathbb{R}^2)$.

On a : $$I_\varepsilon = -\int_{\mathbb{R}}\int_\varepsilon^{+\infty}\frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}}\,\partial_t\varphi(x,t)\,dt\,dx$$

IPP $\rightarrow$ $$= -\int_{\mathbb{R}} -\frac{1}{\sqrt{4\pi\varepsilon}}e^{-\frac{x^2}{4\varepsilon}}\varphi(x,\varepsilon)\,dx + \int_{\mathbb{R}}\int_\varepsilon^{+\infty}\partial_t\left(\frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}}\right)\varphi(x,t)\,dt\,dx$$

par 2. $\rightarrow$ $$= \int_{\mathbb{R}}\frac{e^{-\frac{x^2}{4\varepsilon}}}{\sqrt{4\pi\varepsilon}}\varphi(x,\varepsilon)\,dx + \int_{\mathbb{R}}\int_\varepsilon^{+\infty}\partial^2_{xx}\left(\frac{e^{-x^2/4t}}{\sqrt{4\pi t}}\right)\varphi(x,t)\,dt\,dx$$

2×IPP + Fubini $\rightarrow$ $$= \int_{\mathbb{R}}\frac{e^{-\frac{x^2}{4\varepsilon}}}{\sqrt{4\pi\varepsilon}}\varphi(x,\varepsilon)\,dx + \int_{\mathbb{R}}\int_\varepsilon^{+\infty}\frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}}\,\partial^2_{xx}\varphi(x,t)\,dt\,dx$$
$$= \int_{\mathbb{R}}\frac{e^{-\frac{x^2}{4\varepsilon}}}{\sqrt{4\pi\varepsilon}}\varphi(x,\varepsilon)\,dx - J_\varepsilon.$$

Donc : $$I_\varepsilon + J_\varepsilon = \int_{\mathbb{R}}\frac{e^{-\frac{x^2}{4\varepsilon}}}{\sqrt{4\pi\varepsilon}}\varphi(x,\varepsilon)\,dx.$$

9

<u>b.</u> On pose $y = \frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}$, $dx = \sqrt{\varepsilon}\, dy$.

Alors : $$I_\varepsilon + J_\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2/4} \varphi(\sqrt{\varepsilon} y, \varepsilon)\, dy$$

Or, par convergence dominée, comme $e^{-y^2/4} \varphi(\sqrt{\varepsilon} y, \varepsilon) \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} e^{-y^2/4} \varphi(0,0)$,

et $|e^{-y^2/4} \varphi(\sqrt{\varepsilon} y, \varepsilon)| \leq \|\varphi\|_\infty e^{-y^2/4} \in L^1(\mathbb{R})$, on a :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} I_\varepsilon + J_\varepsilon = \frac{\varphi(0,0)}{\sqrt{4\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2/4}\, dy = \varphi(0,0).$$

<u>4.</u> On a, pour $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$:

$$\begin{aligned}
\langle (\partial_t - \partial_{xx}^2) E, \varphi \rangle &= - \langle E, \partial_t \varphi + \partial_{xx}^2 \varphi \rangle \\
&= - \int_{\mathbb{R}^2} \frac{H(t)}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \left(\partial_t \varphi(x,t) + \partial_{xx}^2 \varphi(x,t) \right) dx\, dt \\
&= - \int_{\mathbb{R} \times]0,+\infty[} \frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}} \left(\partial_t \varphi(x,t) + \partial_{xx}^2 \varphi(x,t) \right) dx\, dt \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0} (I_\varepsilon + J_\varepsilon) = \varphi(0,0) = \langle \delta_0, \varphi \rangle.
\end{aligned}$$

par convergence dominée. En effet :

$$\left| \frac{H(t)}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \partial_t \varphi(x,t) \right| \leq \frac{\partial_t \varphi(x,t)}{\sqrt{4\pi t}} H(t) \in L^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$$

et quand $\varepsilon \to 0$, $\mathbb{1}_{[\varepsilon,+\infty[}(t) \frac{H(t)}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \partial_t \varphi(x,t) \longrightarrow \frac{H(t)}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \partial_t \varphi(x,t)$

et donc $I_\varepsilon \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} - \int_{\mathbb{R}^2} \frac{H(t)}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \partial_t \varphi(x,t)\, dx\, dt$.

De même : $J_\varepsilon \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} - \int_{\mathbb{R}^2} \frac{H(t)}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \partial_{xx}^2 \varphi(x,t)\, dx\, dt$.

Donc, dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$, $\boxed{(\partial_t - \partial_{xx}^2) E = \delta_0}$

(10)

Exercice 6 - Equation de Cauchy-Riemann.

1. On a : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, $|f(x,y)| = \frac{1}{|x+iy|} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$.

car dans $\mathbb{R}^n$, $\frac{1}{\|x\|^\alpha}$ est intégrable en 0 si $\alpha < n$ (se voit en passant en coordonnées polaires).

2. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$. On a :

$$\langle \bar\partial f, \varphi \rangle = \frac{1}{2}\langle \partial_x f, \varphi\rangle + \frac{i}{2}\langle \partial_y f, \varphi\rangle$$
$$= -\frac{1}{2}\langle f, \partial_x\varphi\rangle - \frac{i}{2}\langle f, \partial_y \varphi\rangle$$
$$= -\frac{1}{2}\langle f, \partial_x\varphi + i\partial_y\varphi\rangle$$
$$= -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{x+iy}(\partial_x\varphi + i\partial_y\varphi)(x,y)\,dx\,dy.$$

$\times \frac{x-iy}{x-iy}$ dans $\int$ $\rightarrow$ $= -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2}\frac{1}{x^2+y^2}(x\partial_x\varphi + y\partial_y\varphi)(x,y)\,dx\,dy - \frac{1}{2}i\int_{\mathbb{R}^2}\frac{1}{x^2+y^2}(x\partial_y\varphi - y\partial_x\varphi)\,dx\,dy$

en posant $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta\end{cases}$ $\rightarrow$ $= -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_{\mathbb{R}^+}\frac{1}{r^2}\, r\partial_r\tilde\varphi(r,\theta)\times r\,dr\,d\theta - \frac{1}{2}i\int_0^{2\pi}\int_{\mathbb{R}^+}\frac{1}{r^2}(\partial_\theta\tilde\varphi(r,\theta))\,r\,dr\,d\theta$

et $\tilde\varphi(r,\theta) = \varphi(r\cos\theta, r\sin\theta)$

car $\partial_r\tilde\varphi(r,\theta) = \partial_r\,\varphi(r\cos\theta, r\sin\theta) = \cos\theta\,\partial_x\varphi + \sin\theta\,\partial_y\varphi$
$= \frac{1}{r}(x\partial_x\varphi + y\partial_y\varphi)$

et $\partial_\theta\tilde\varphi(r,\theta) = \partial_\theta\,\varphi(r\cos\theta, r\sin\theta) = -r\sin\theta\,\partial_x\varphi + r\cos\theta\,\partial_y\varphi$
$= x\partial_y\varphi - y\partial_x\varphi$

Soit $\varepsilon > 0$: $\langle\bar\partial f, \varphi\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[-\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_\varepsilon^{+\infty}\partial_r\tilde\varphi(r,\theta)\,dr\,d\theta - \frac{1}{2}i\cdot\int_\varepsilon^{+\infty}\frac{1}{r}\int_0^{2\pi}\partial_\theta\tilde\varphi(r,\theta)\,d\theta\,dr\right]$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\tilde\varphi(\varepsilon,\theta)\,d\theta - \frac{1}{2}i\int_\varepsilon^{+\infty}\frac{1}{r}\underbrace{(\tilde\varphi(r,2\pi) - \tilde\varphi(r,0))}_{0}\,dr\right]$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\tilde\varphi(\varepsilon,\theta)\,d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\varphi(0,0)\,d\theta = \pi\varphi(0,0).$$

par convergence dominée car $|\tilde\varphi(\varepsilon,\theta)| \leq M$ est intégrable sur $[0,2\pi]$ et $\tilde\varphi(\varepsilon,\theta) \underset{\varepsilon\to 0}{\to} \varphi(0,0)$.

D'où $\langle\bar\partial f, \varphi\rangle = \pi\varphi(0,0) = \langle\pi\delta_0, \varphi\rangle$ i.e. $\bar\partial f = \pi\delta_0$.