Sup Galilée

Filière MACS 2

Mathématiques - Théorie Générale

Année 2012 - 2013

(1)

Feuille de TD 5 : Distributions tempérées - Transformée de Fourier

Exercice 1 :

1. Supposons par l'absurde qu'il existe un polynôme P tel que : $\forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq |P(x)|$.

Alors : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad |\cos(e^x)| \leq \dfrac{|P(x)|}{e^x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

D'où : $\lim\limits_{x \to +\infty} \cos(e^x) = 0$. Or, si on considère la suite $(x_n)_{n \geq 1}$ définie par : $\forall n \geq 1, \; x_n = \log(2n\pi)$, on a :

$x_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $\forall n \geq 1, \; \cos(e^{x_n}) = \cos(2n\pi) = 1$.

Donc, on ne peut pas avoir $\lim\limits_{x \to +\infty} \cos(e^x) = 0$.

2. Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Soient m et M dans $\mathbb{R}$. On a :

$$\int_m^M f(x)\varphi(x)\,dx = \int_m^M \varphi(x) \underbrace{e^x \cos(e^x)}_{\frac{d}{dx}(\sin(e^x))} dx = \left[\varphi(x)\sin(e^x)\right]_m^M - \int_m^M \varphi'(x)\sin(e^x)\,dx$$

Alors : $\left| \varphi(M)\sin(e^M) - \varphi(m)\sin(e^m) \right| \leq |\varphi(M)| + |\varphi(m)|$

Or : $|\varphi(m)| \underset{m \to -\infty}{\longrightarrow} 0$ et $|\varphi(M)| \underset{M \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ car $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

② Puis, comme : $\forall x \in \mathbb{R}$, $|\varphi'(x)\sin(e^x)| \leq |\varphi'(x)|$ et que

$\varphi' \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi'(x)\sin(e^x)\,dx$ est absolument convergente.

On en déduit que $\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)\,dx$ est convergente.

3. Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

$$|\langle S, \varphi\rangle| = \left|\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)\,dx\right|$$

par 2. $\rightarrow \leq \int_{\mathbb{R}} |\sin(e^x)\,\varphi'(x)|\,dx$

$$\leq \int_{\mathbb{R}} \frac{1+x^2}{1+x^2}\,|\varphi'(x)|\,dx$$

$$\leq \sup_{x\in\mathbb{R}} \left((1+x^2)|\varphi'(x)|\right) \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{1+x^2}}_{=\pi}$$

$$\leq \pi \sup_{x\in\mathbb{R}} \left((1+x^2)\,|\varphi'(x)|\right)$$

Donc S est bien une distribution tempérée sur $\mathbb{R}$.

③ Exercice 2 :

On commence par déterminer les solutions "classiques" de l'équation homogène associée $u'+u=0$. On trouve : $\forall x\in\mathbb{R}, u(x)=Ce^{-x}$, $C\in\mathbb{R}$

Puis on cherche une distribution S solution particulière de $u'+u=\delta_0$ de la forme $S=e^{x}T$ où T est solution de $u'+u=\delta_0$.
("variation de la constante"). On a alors :

$$S'=(e^{x}T)'=e^{x}(T+T')=\delta_0\, e^{x}=\delta_0 e^{0}=\delta_0.$$

Donc $\underbrace{S=H}_{\text{distribution de Heaviside : fonction caractéristique de } \mathbb{R}_+}+C$, $C\in\mathbb{R}$.

D'où : $T=H\ e^{-x}+Ce^{-x}$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Or, la distribution associée à $x\mapsto e^{-x}$ n'est pas dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ (voir le comportement en $-\infty$), donc la seule solution de $u'+u=\delta_0$ **qui soit** dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ est la distribution : $\boxed{T=He^{-x}}$.

Exercice 3 - Transformée de Fourier de la Gaussienne

1. Par Fubini, on a :

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx\right)^2 = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}dy\right) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}dxdy$$

Puis, en effectuant un changement de variables polaires,

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} e^{-r^2} r\,d\theta\,dr = 2\pi\int_0^{\infty} re^{-r^2}dr = 2\pi\left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]_0^{+\infty}$$
$$= \pi.$$

Donc $\underline{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}}$.

2. • Comme $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, on peut appliquer le théorème de dérivation sous le signe intégral pour obtenir :

$$\frac{d}{d\xi}\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} -ix\,e^{-ax^2}e^{-ix\xi}dx$$
$$\overset{\text{IPP}}{=} i\left(\underbrace{\cancel{\left[\frac{1}{2a}e^{-ax^2}e^{-ix\xi}\right]_{-\infty}^{+\infty}}}_{=0} - \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2a}e^{-ax^2}(-i\xi)e^{-ix\xi}dx\right)$$
$$= -\frac{\xi}{2a}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2}e^{-ix\xi}dx = -\frac{\xi}{2a}\hat{f}(\xi)$$

D'où : $\underline{\frac{d}{d\xi}\hat{f}(\xi) + \frac{\xi}{2a}\hat{f}(\xi) = 0,\ \forall \xi \in \mathbb{R}}$.

• La solution générale de $y' + \frac{\xi}{2a}y = 0$ est donnée par :

$$\underline{\forall \xi \in \mathbb{R},\quad y(\xi) = Ce^{-\frac{\xi^2}{4a}},\quad C \in \mathbb{R}.}$$

3. Pour déterminer $\hat{f}$, il suffit de trouver la bonne constante C.

Or, $C = \hat{f}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2}dx \underset{u=\sqrt{a}x}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}\frac{du}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}}$. D'où :

$\underline{\forall \xi \in \mathbb{R},\ \hat{f}(\xi) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}}e^{-\frac{\xi^2}{4a}}}$

(5)

Exercice 4 :

1. Soit $a \in \mathbb{R}$. On a : $\mathcal{F}(\delta_a) = e^{-ia\xi}$. Puis par inversion de Fourier, $\mathcal{F}\mathcal{F}(\delta_a) = \mathcal{F}(e^{-ia\xi})$ avec $\mathcal{F}\mathcal{F} = 2\pi\,\sigma$ où $\sigma : \xi \mapsto -\xi$. D'où : $\delta_a = \frac{\sigma}{2\pi}\mathcal{F}(e^{-ia\xi}) = \frac{\mathcal{F}(e^{ia\xi})}{2\pi}$.

Donc : $\boxed{\mathcal{F}(e^{iax}) = 2\pi\,\delta_a}$

2. On écrit : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$.

D'où, par linéarité de $\mathcal{F}$ et par 1. :

$$\mathcal{F}(\cos x) = \frac{1}{2}\left(\mathcal{F}(e^{ix}) + \mathcal{F}(e^{-ix})\right) = \pi(\delta_{-1} + \delta_1)$$

3. On a :

$$\mathcal{F}(x\sin x) = i\partial_\xi\, \mathcal{F}(\sin x) = i\partial_\xi\left(\frac{\pi}{i}\,\delta_{-1} - \delta_1\right)$$
$$= \pi\left(\delta'_{-1} + \delta'_1\right).$$

4. <u>Méthode directe :</u> Si $u = \mathcal{F}\left(\frac{\sin x}{x}\right)$, comme $\sin x = \frac{\sin x}{x} \times x$,

on a : $iu' = \mathcal{F}(\sin x)$, d'où : $u' = \mathcal{F}\left(-ix\,\frac{\sin x}{x}\right)$

et par 3. : $u' = -\pi(\delta_1 - \delta_{-1})$ $(*)$

Alors : $u'|_{]-\infty,-1[} = 0$, $u'|_{]-1,1[} = 0$ et $u'|_{]1,\infty[} = 0$
$\Rightarrow u|_{]-\infty,-1[} = a$ $\Rightarrow u|_{]-1,1[} = b$ $\Rightarrow u|_{]1,\infty[} = c$

Si on pose $\tilde{u} = \begin{cases} a & \text{si } x < -1 \\ b & \text{si } -1 < x < 1 \\ c & \text{si } x > 1 \end{cases}$, alors, par la formule

des sauts : $\tilde{u}' = (b-a)\,\delta_{-1} + (c-b)\,\delta_1$ et on veut a, b, c tels que :

$b - a = \pi$ et $c - b = -\pi$. Cela conduit à $c = a$ et $b = \pi + a$.

Alors : $\tilde{u} = a + \pi \mathbb{1}_{]-1,1[}$ est solution de $(*)$ D'où la solution générale de $(*)$: $u = \tilde{u} + \text{cte} = A + \pi\mathbb{1}_{]-1,1[}$, $A \in \mathbb{R}$.

6

On, $\frac{\sin x}{x} \in L^2(\mathbb{R})$, donc par le théorème de Plancherel, $\mathcal{F}\left(\frac{\sin x}{x}\right) \in L^2(\mathbb{R})$. Donc, comme la constante A n'est pas $L^2(\mathbb{R})$, hormis si elle est nulle, on doit avoir $A=0$.

Finalement : $\underline{\mathcal{F}\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \pi \mathbb{1}_{]-1,1[}}$.

<u>Méthode inverse :</u> On a : $\mathcal{F}\left(\mathbb{1}_{]-1,1[}(x)\right) = \int_{-1}^{1} e^{-ix\xi}\,dx = \frac{2\sin\xi}{\xi}$

Puis : $$\underbrace{\mathcal{F}\mathcal{F}\left(\mathbb{1}_{]-1,1[}(x)\right)}_{= 2\pi \mathbb{1}_{]-1,1[}(x)} = 2\,\mathcal{F}\left(\frac{\sin x}{x}\right)$$

D'où : $\mathcal{F}\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \pi \mathbb{1}_{]-1,1[}$.

<u>5.</u> On a, puisque $x \mapsto e^{-a|x|} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ car $a>0$:

$$\mathcal{F}(e^{-a|x|})(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|x|} e^{-ix\xi}\,dx = \int_{-\infty}^{0} e^{ax-ix.\xi}\,dx + \int_0^{+\infty} e^{-ax-i\xi x}\,dx$$

$$= \left[\frac{1}{a-i\xi} e^{(a-i\xi)x}\right]_{-\infty}^{0} + \left[-\frac{1}{a+i\xi} e^{-(a+i\xi)x}\right]_0^{+\infty}$$

$$= \frac{1}{a-i\xi} + \frac{1}{a+i\xi} = \frac{2a}{a^2+\xi^2}$$

Donc : $\underline{\mathcal{F}\left(e^{-a|x|}\right) = \frac{2a}{a^2+\xi^2}}$

<u>6.</u> De même : $\mathcal{F}\left(|x|e^{-a|x|}\right)(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} |x|e^{-a|x|} e^{-ix\xi}\,dx$

$$= \int_{-\infty}^{0} -x e^{ax-ix\xi}\,dx + \int_0^{+\infty} x e^{-ax-ix\xi}\,dx$$

$$= \left[-x \frac{1}{a-i\xi} e^{(a-i\xi)x}\right]_{-\infty}^{0} + \int_{-\infty}^{0} \frac{e^{(a-i\xi)x}}{a-i\xi}\,dx + \left[-\frac{x}{a+i\xi} e^{-(a+i\xi)x}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(a+i\xi)x}}{a+i\xi}\,dx$$

7

$$= 0 + \left[\frac{e^{(a-i\xi)x}}{(a-i\xi)^2} \right]_{-\infty}^{0} + 0 + \left[- \frac{e^{-(a+i\xi)x}}{(a+i\xi)^2} \right]_{0}^{+\infty}$$

$$= \frac{1}{(a-i\xi)^2} + \frac{1}{(a+i\xi)^2} = \frac{(a+i\xi)^2 + (a-i\xi)^2}{(a^2+\xi^2)^2} = \frac{2(a^2-\xi^2)}{(a^2+\xi^2)^2}$$

Donc : $\mathcal{F}(|x|e^{-a|x|}) = \dfrac{2(a^2-\xi^2)}{(a^2+\xi^2)^2}$

7. Comme $\sin 0 = 0$, on a : $\sin|x| = \sin x \, 1\!\!1_{x>0} - \sin x \, 1\!\!1_{x<0}$

Or : $\sin x \, 1\!\!1_{x>0} = \lim_{\varepsilon \to 0} \sin x \, e^{-\varepsilon x} 1\!\!1_{x>0}$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$. $(*)$

Or : $\forall \varepsilon > 0$, $\mathcal{F}(\sin x \, e^{-\varepsilon x} 1\!\!1_{x>0})(\xi) = \int_0^{+\infty} \sin x \, e^{-\varepsilon x - ix\xi} dx$

$$= \frac{1}{2i} \int_0^{+\infty} e^{x(i-\varepsilon-i\xi)} dx - \frac{1}{2i} \int_0^{+\infty} e^{-x(i+\varepsilon+i\xi)} dx$$

$$= \frac{1}{2i} \left[\frac{1}{i(\xi-1)+\varepsilon} - \frac{1}{i(\xi+1)+\varepsilon} \right]$$

$$= -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\xi-1-i\varepsilon} - \frac{1}{\xi+1-i\varepsilon} \right)$$

Or, on sait par l'exercice 6 de la Feuille de TD 2 que, dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$,

$$\frac{1}{y+a-i\varepsilon} \xrightarrow[\varepsilon \to 0^+]{} vp\left(\frac{1}{y+a}\right) + i\pi \delta_{a}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Donc : $\mathcal{F}(\sin x \, e^{-\varepsilon x} 1\!\!1_{x>0}) \xrightarrow[\varepsilon \to 0^+]{} -\frac{1}{2}\left(vp\left(\frac{1}{\xi-1}\right) - vp\left(\frac{1}{\xi+1}\right)\right) + i\frac{\pi}{2}(\delta_1 - \delta_{-1})$

Et de même : $\mathcal{F}(\sin x \, e^{\varepsilon x} 1\!\!1_{x<0}) \xrightarrow[\varepsilon \to 0^+]{} \frac{1}{2}\left(vp\left(\frac{1}{\xi-1}\right) - vp\left(\frac{1}{\xi+1}\right)\right) + i\frac{\pi}{2}(\delta_1 - \delta_{-1})$

D'où, comme la convergence de $(*)$ a lieu dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, on a :

$$\boxed{\mathcal{F}(\sin|x|) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(\mathcal{F}(\sin e^{-\varepsilon x} 1\!\!1_{x>0}) - \mathcal{F}(\sin x \, e^{\varepsilon x} 1\!\!1_{x<0}) \right) = vp\left(\frac{1}{\xi+1}\right) - vp\left(\frac{1}{\xi-1}\right)}$$

Exercice 5

1. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. On a :

$$\langle xT, \varphi \rangle = \langle vp(\tfrac{1}{x}), x\varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{x\varphi(x)}{x}\, dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{|x|\geq \varepsilon} \varphi(x)\, dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\, dx = \langle 1, \varphi \rangle.$$

Donc $xT = 1$.

2. Par 1., on a : $\mathcal{F}(xT) = \mathcal{F}(1)$. Or, $\mathcal{F}(1) = 2\pi\delta_0$ et $\mathcal{F}(xT) = -\frac{1}{i}\frac{d}{d\xi}(\mathcal{F}(T))$. Donc :

$$\frac{d}{d\xi}\hat{T} = -2i\pi\delta_0 \text{ et } \frac{d}{d\xi}(\hat{T} + 2i\pi H) = 0.$$

(car $H' = \delta_0$).

Donc, il existe une constante C telle que :

$$\hat{T} + 2i\pi H = C \quad \text{i.e.} \quad \hat{T} = -2i\pi H + C.$$

3. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. On a :

$$\langle \check{T}, \varphi \rangle = \langle T, \check{\varphi} \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x|\geq\varepsilon} \frac{\varphi(-x)}{x}\, dx$$

Posons, pour $\varepsilon > 0$ fixé, $u = -x$. Alors :

$$\int_{|x|\geq \varepsilon} \frac{\varphi(-x)}{x}\, dx = -\int_{|u|\geq\varepsilon} \frac{\varphi(u)}{-u}(-du) = -\int_{|u|\geq\varepsilon} \frac{\varphi(u)}{u}\, du$$

D'où : $\langle \check{T}, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} -\int_{|u|\geq\varepsilon} \frac{\varphi(u)}{u}\, du = -\langle vp(\frac{1}{x}), \varphi \rangle$
$= \langle -T, \varphi \rangle$.

D'où : $\check{T} = -T$. On dit que $vp(\frac{1}{x})$ est une distribution impaire.

(9)

Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ et soit $a \in \mathbb{R}$ tel que $\operatorname{supp}\varphi \subset [-a,a]$

On a : $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $\hat{\check{\varphi}}(\xi) = \int_{-a}^{a} e^{-ix\xi}\varphi(-x)\,dx$

$$\overset{u=-x}{=} \int_{a}^{-a} e^{iu\xi}\varphi(u)\,(-du)$$

$$= \int_{-a}^{a} e^{-iu(-\xi)}\varphi(u)\,du = \hat{\varphi}(-\xi) = \check{\hat{\varphi}}(\xi).$$

D'où : $\langle \hat{T}, \check{\varphi}\rangle = \langle T, \hat{\check{\varphi}}\rangle = \langle T, \check{\hat{\varphi}}\rangle = \langle \check{T}, \hat{\varphi}\rangle$

$$= \langle -T, \hat{\varphi}\rangle = \langle -\hat{T}, \varphi\rangle.$$

4. On déduit de 3. que $\hat{T}$ est une distribution impaire.

Donc : $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $-2i\pi H(\xi) + C = -(-2i\pi H(-\xi) + C)$

D'où : $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $\cancel{2}i\pi(\underbrace{H(\xi) + H(-\xi)}_{=1}) = \cancel{2}C$

Donc $C = i\pi$.

Finalement : $\boxed{\widehat{vp\left(\frac{1}{x}\right)} = -2i\pi H + i\pi.}$

5. Par 4. : $2i\pi H = -\hat{T} + i\pi$

D'où : $2i\pi\hat{H} = -\hat{\hat{T}} + i\pi\hat{1} = -2\pi\check{T} + i\pi(2\pi\delta_0)$

$$= 2\pi T + 2i\pi^2\delta_0$$

car $\check{T} = -T$

Donc : $\boxed{\hat{H} = \frac{1}{i}vp\left(\frac{1}{\xi}\right) + \pi\delta_0}$

10

Exercice 6 : Principe d'incertitude de Heisenberg

1. Tout d'abord, on rappelle que : $\widehat{f'}(\xi) = i\xi \hat{f}(\xi)$, $\forall \xi \in \mathbb{R}$.

D'où : $|\widehat{f'}(\xi)|^2 = \xi^2 |\hat{f}(\xi)|^2$, $\forall \xi \in \mathbb{R}$.

Alors :

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 |f(x)|^2 dx\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \xi^2 |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi\right) = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 |f(x)|^2 dx\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{f'}(\xi)|^2 d\xi\right)$$

Or, par Parseval, $\int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{f'}(\xi)|^2 d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} |f'(x)|^2 dx$

D'où :

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 |f(x)|^2 dx\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \xi^2 |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi\right) = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 |f(x)|^2 dx\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f'(x)|^2 dx\right)$$

2. On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz au membre de droite de la précédente inégalité pour obtenir :

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 |f(x)|^2 dx\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \xi^2 |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi\right) \geq \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |x f(x) f'(x)| dx\right)^2$$

3. • On a : $|ab| = |a\bar{b}| \geq \mathrm{Re}(a\bar{b}) = \frac{1}{2}(a\bar{b} + \overline{a\bar{b}}) = \frac{1}{2}(a\bar{b} + \bar{a}b)$, $\forall a, b \in \mathbb{C}$.

• On a : $\frac{d}{dx}|f(x)|^2 = \frac{d}{dx}\left(f(x)\overline{f(x)}\right) = f'(x)\overline{f(x)} + f(x)\overline{f'(x)}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

4. D'où : $\left(\int_{-\infty}^{+\infty} |x f(x) f'(x)| dx\right)^2 \geq \left(\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\overline{f'(x)} + x\overline{f(x)} f'(x)\, dx\right)^2$

$$= \frac{1}{4}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} x\left(f(x)\overline{f'(x)} + \overline{f(x)} f'(x)\right) dx\right)^2$$

$$= \frac{1}{4}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{d}{dx}|f(x)|^2\, dx\right)^2$$

IPP

$$= \frac{1}{4}\Big[\underbrace{\left[x|f(x)|^2\right]_{-\infty}^{+\infty}}_{=0 \text{ car } f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})} - \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx}_{=1}\Big]^2$$

$$= \frac{1}{4}$$

On a donc bien :

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 |f(x)|^2 \, dx\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \xi^2 |\hat{f}(\xi)|^2 \, d\xi\right) \geq \frac{1}{4}.$$

Comme $\|f\|_{L^2(\mathbb{R})} = 1$ et $\|\hat{f}\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|f\|_{L^2(\mathbb{R})} = 1$, on peut interpréter $x \mapsto |f(x)|^2$ et $\xi \mapsto |\hat{f}(\xi)|^2$ comme des densité de probabilité. Alors, $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 |f(x)|^2 dx$ est la variance de la variable x pour la mesure de probabilité $|f(x)|^2 dx$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} \xi^2 |\hat{f}(\xi)|^2 dx$ est la variance de la variable ξ pour la mesure de probabilité $|\hat{f}(\xi)|^2 d\xi$. Le principe d'incertitude de Heisenberg affirme donc que le produit des variances de deux quantités conjuguées au sens de Fourier est minoré par une constante indépendante de ces variables.

Si on passe à la racine carrée dans l'inégalité obtenue on a une inégalité sur les écarts-type de x et ξ :

$$\Delta x . \Delta \xi \geq \frac{1}{2}.$$

En mécanique quantique, des exemples de telles variables conjuguées sont : la position x et la quantité de mouvement p :

$$\Delta x \, \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

ou l'énergie et le temps :

$$\Delta E . \Delta t \geq \hbar$$

Exercice 7

Tout d'abord, on remarque que comme u est à support compact, $\hat{u}$ est une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}^n$.

Appliquons $\mathcal{F}$ à l'équation $P(D)u = 0$: $P(\xi)\hat{u}(\xi) = 0, \forall \xi \in \mathbb{R}^n$.

Posons $Z = \{\xi \in \mathbb{R}^n, P(\xi) = 0\}$. Alors $\forall \xi \in \mathbb{R}^n \setminus Z, \hat{u}(\xi) = 0$.

Mais, comme P est un polynôme, Z est un fermé d'intérieur vide car P est non identiquement nul. Donc $\mathbb{R}^n \setminus Z$ est dense dans $\mathbb{R}^n$. Comme $\hat{u}$ est continue et nulle sur l'ensemble dense $\mathbb{R}^n \setminus Z$, $\hat{u}$ est nulle partout.

Par transformée de Fourier inverse, on obtient alors que $u = 0$

Exercice 8 :

1. • Tout d'abord, on remarque que comme $\mathrm{supp}(T*S)$ est inclus dans $\mathrm{supp}\,T + \mathrm{supp}\,S$, puisque T_1 est à support compact, on montre par récurrence que toutes les T_k sont aussi à support compact.

• On rappelle aussi que pour a et b dans $\mathbb{R}$, on a :

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}),\ \langle \delta_a * \delta_b , \varphi \rangle = \langle \delta_a , \langle \delta_b , \varphi^{\Delta} \rangle\rangle$$
$$= \langle \delta_a , \varphi(x+b) \rangle$$
$$= \varphi(a+b) = \langle \delta_{a+b} , \varphi \rangle .$$

Donc : $\delta_a * \delta_b = \delta_{a+b}$.

• On peut alors calculer T_k. Soit $k \geqslant 2$:

$$T_k = \underbrace{T_1 * \dots * T_1}_{k \text{ fois}} = T_1^{*k} = \frac{1}{2^k}\left(\delta_1 + \delta_{-1}\right)^{*k}$$

Or $*$ est commutatif et associatif, on peut donc appliquer la formule du binôme de Newton pour obtenir :

$$T_k = \frac{1}{2^k} \sum_{j=0}^{k} C_k^j \, \delta_1^{*j} * \delta_{-1}^{*(k-j)}$$
$$= \frac{1}{2^k} \sum_{j=0}^{k} C_k^j \, \delta_j * \delta_{j-k}$$
$$= \frac{1}{2^k} \sum_{j=0}^{k} C_k^j \, \delta_{2j-k}$$

Donc : $\forall k \geqslant 2,\ T_k = \dfrac{1}{2^k} \displaystyle\sum_{j=0}^{k} C_k^j \, \delta_{2j-k}$.

(14)

2. Comme $T_k = T_1^{*k}$, on a : $\hat{T}_k(\xi) = \left(\hat{T}_1(\xi)\right)^k$

On : $\hat{T}_1(\xi) = \frac{1}{2}\left(\hat{\delta}_1 + \hat{\delta}_{-1}\right) \underset{\uparrow}{=} \frac{1}{2}\left(e^{-i\xi} + e^{i\xi}\right) = \cos \xi$

par l'exercice 2

Donc $\boxed{\hat{T}_k(\xi) = (\cos \xi)^k}$ et $\hat{T}_k$ est bien C^∞ (ce que l'on savait déjà car $T_k \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$).

3. D'après 2., on a : $\forall k \geq 1, \forall \xi \in \mathbb{R}, f_k(\xi) = \left(\cos\left(\frac{\xi}{\sqrt{k}}\right)\right)^k$.

Alors, $f_k \in L^\infty(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, donc $f_k \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Pour montrer la convergence de f_k dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, on fixe $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et on cherche la limite éventuelle de $\langle f_k, \varphi \rangle$.

Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. On a :

$$\forall k \geq 1, \quad \langle f_k, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f_k(\xi)\varphi(\xi)\,d\xi .$$

On fixe $\xi \in \mathbb{R}$. Pour $k \geq 4|\xi|^2$, on a $\frac{|\xi|}{\sqrt{k}} \leq \frac{1}{2}$ et $\cos\left(\frac{\xi}{\sqrt{k}}\right) \geq 0$

On : $\cos\left(\frac{\xi}{\sqrt{k}}\right) = 1 - \frac{\xi^2}{2k} + o\left(\frac{\xi^2}{k}\right)$ et

$$\log f_k(\xi) = k \log\left(\cos\left(\frac{\xi}{\sqrt{k}}\right)\right) = k \log\left(1 - \frac{\xi^2}{2k} + o\left(\frac{\xi^2}{k}\right)\right)$$

$$= -\frac{\xi^2}{2} + \underset{k \to 0}{o}(\xi^2)$$

D'où : $\lim\limits_{k \to +\infty} \log f_k(\xi) = -\frac{\xi^2}{2}$ et $\lim\limits_{k \to +\infty} f_k(\xi) = e^{-\frac{\xi^2}{2}}$.

On : $\forall \xi \in \mathbb{R}, \ |f_k(\xi)\varphi(\xi)| \leq |\varphi(\xi)| \in L^1(\mathbb{R})$ et est indépendant de k, donc par le théorème de convergence dominée,

15

$$\lim_{k\to+\infty} \langle f_k, \varphi \rangle = \lim_{k\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f_k(\xi)\varphi(\xi)\,d\xi$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \lim_{k\to+\infty} f_k(\xi)\varphi(\xi)\,d\xi$$

$$= \int_{\mathbb{R}} e^{-\xi^2/2}\,\varphi(\xi)\,d\xi$$

$$= \langle e^{-\xi^2/2}, \varphi \rangle.$$

D'où, $(f_k)_{k\geq 1}$ converge dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ vers $e^{-\xi^2/2}$.

4. Soit $g_k \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ telle que $f_k = \mathcal{F}(g_k)$.

Alors, $\mathcal{F}(f_k) = (2\pi\sigma)(g_k)$ et $g_k = \frac{1}{2\pi}(\mathcal{F}\circ\sigma)(f_k)$, $\forall k \geq 1$.

Par continuité de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, on déduit de la convergence dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ de $(f_k)_{k\geq1}$, la convergence de $(g_k)_{k\geq 1}$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

De plus, $(g_k)_{k\geq1}$ converge dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ vers $\frac{1}{2\pi}(\mathcal{F}\circ\sigma)(e^{-\frac{1}{2}\xi^2})$

et $\forall x\in\mathbb{R}$, $\frac{1}{2\pi}(\mathcal{F}\circ\sigma)(e^{-\frac{1}{2}\xi^2})(x) = \frac{1}{2\pi}\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{1/2}}\, e^{-\frac{(-x)^2}{4\times\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}$

Donc, dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$,

$$g_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}.$$