

(9)

Feuille de TD 6 : Espaces de SobolevExercice 1:

• On a: $\hat{\delta}_0 = 1$, d'où: $\delta_0 \in H^s(\mathbb{R}^m) \Leftrightarrow (1+|\xi|^2)^{s/2} 1 \in L^2(\mathbb{R}^m)$
 $\Leftrightarrow (1+|\xi|^2)^s \in L^1(\mathbb{R}^m)$

$$\Leftrightarrow 2s < -m \Leftrightarrow \boxed{s < -\frac{m}{2}}$$

• On a: $\hat{\delta}'_0 = i\xi \hat{\delta}_0 = i\xi$. D'où:

$$\delta'_0 \in H^s(\mathbb{R}^m) \Leftrightarrow (1+|\xi|^2)^{s/2} |\xi| \in L^2(\mathbb{R}^m)$$

$$\Leftrightarrow (1+|\xi|^2)^s |\xi|^2 \in L^1(\mathbb{R}^m)$$

$$\Leftrightarrow 2s+2 < -m \Leftrightarrow \boxed{s < -\frac{m}{2} - 1}$$

• Pour $k \in (\mathbb{N})^m$, $\hat{\delta}_0^{(k)} = (i\xi)^k \hat{\delta}_0 = (i\xi)^k$. D'où:

$$\delta_0^{(k)} \in H^s(\mathbb{R}^m) \Leftrightarrow (1+|\xi|^2)^{s/2} |\xi|^{2|k|} \in L^2(\mathbb{R}^m)$$

$$\Leftrightarrow (1+|\xi|^2)^s |\xi|^{2|k|} \in L^1(\mathbb{R}^m)$$

$$\Leftrightarrow 2s+2|k| < -m \Leftrightarrow \boxed{s < -\frac{m}{2} - |k|}$$

• Pour $m=1$, $\hat{H} = \frac{1}{i} \nu \rho\left(\frac{1}{\xi}\right) + \pi \delta_0$. On: $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $\pi (1+|\xi|^2)^{s/2} \delta_0(\xi) = \pi$ qui

m' est pas dans $L^2(\mathbb{R})$. Donc $\boxed{\forall s \in \mathbb{R}, H \notin H^s(\mathbb{R})}$.

②

Exercice 2

Soit $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ telle que $\Delta^2 u + 2\Delta u - u \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

Par transformée de Fourier et par Plancherel :

$$(1+|\xi|^2)^4 \hat{u}(\xi) + 2|\xi|^2 \hat{u}(\xi) - \hat{u}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n)$$

$$\Rightarrow (1+|\xi|^2)^4 \hat{u}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

On veut montrer que $(1+|\xi|^2)^2 \hat{u}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n)$, ce qui signifie exactement que $u \in H^4(\mathbb{R}^n)$.

On écrit :

$$(1+|\xi|^2)^2 \hat{u}(\xi) = \frac{(1+|\xi|^2)^2}{1+|\xi|^4 - 2|\xi|^2 - 1} \underbrace{(1+|\xi|^2)^2 \hat{u}(\xi)}_{\in L^2(\mathbb{R}^n)}$$

$L^\infty(\mathbb{R}^n \setminus K)$ où K est un compact de $\mathbb{R}^n$ contenant les zéros de $1+|\xi|^4 - 2|\xi|^2 - 1$. (si $\xi \in \mathbb{R}^n$ est un tel zéro,

Donc $(1+|\xi|^2)^2 \hat{u}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n)$ et $u \in H^4(\mathbb{R}^n)$. $1+|\xi|^4 - 2|\xi|^2 - 1 = 0 \iff |\xi|^4 - 2|\xi|^2 = 0 \iff |\xi|^2(|\xi|^2 - 2) = 0 \iff |\xi|^2 = 0 \text{ ou } |\xi|^2 = 2$

③

Exercice 3

Soit $s \in \mathbb{R}$.

- Tout d'abord, montrons que P est bien défini de $H^{s+2}(\mathbb{R}^m)$ dans $H^s(\mathbb{R}^m)$. Soit $u \in H^{s+2}(\mathbb{R}^m)$. On a:

$$\mathcal{F}(-\Delta u + \lambda u)(\xi) = (|\xi|^2 + \lambda) \hat{u}(\xi), \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^m.$$

$$\begin{aligned} \text{D'où : } (1+|\xi|^2)^{s/2} |\mathcal{F}(-\Delta u + \lambda u)| &= (1+|\xi|^2)^{s/2} (|\xi|^2 + \lambda) |\hat{u}| \\ &\leq \max(1, \lambda) (1+|\xi|^2)^{s/2+1} |\hat{u}| \quad (*) \end{aligned}$$

$$\text{Comme } u \in H^{s+2}(\mathbb{R}^m), \quad (1+|\xi|^2)^{s/2+1} |\hat{u}| \in L^2(\mathbb{R}^m).$$

D'où: $-\Delta u + \lambda u \in H^s(\mathbb{R}^m)$. Comme P est linéaire, P est bien linéaire de $H^{s+2}(\mathbb{R}^m)$ dans $H^s(\mathbb{R}^m)$.

- Montrons que P est une application linéaire continue. D'après l'inégalité (*): $\|-\Delta u + \lambda u\|_{H^s(\mathbb{R}^m)} \leq \max(1, \lambda) \|u\|_{H^{s+2}(\mathbb{R}^m)}$
i.e: $\forall u \in H^{s+2}(\mathbb{R}^m), \quad \|Pu\|_{H^s(\mathbb{R}^m)} \leq \max(1, \lambda) \|u\|_{H^{s+2}(\mathbb{R}^m)}.$

Ainsi, P est continue et $\|P\| \leq \max(1, \lambda)$.

- Montrons que P est injective. Soit $u \in H^{s+2}(\mathbb{R}^m)$ telle que $Pu = 0$.

$$\text{Alors: } (|\xi|^2 + \lambda) \hat{u} = 0 \quad \text{et comme } |\xi|^2 + \lambda > 0, \quad |\xi|^2 + \lambda \neq 0$$

$$\text{d'où: } \hat{u} = 0 \text{ dans } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m). \quad \text{D'où } u = 0. \text{ Donc } \text{Ker } P = \{0\}.$$

et P est injective.

- Montrons que P est surjective. Soit $f \in H^s(\mathbb{R}^m)$.

$$\text{Posons } u = \mathcal{F}^{-1} \left(\frac{\hat{f}}{|\xi|^2 + \lambda} \right) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m). \text{ Alors } \mathcal{F}(Pu) = (|\xi|^2 + \lambda) \hat{u} = \hat{f}.$$

Donc: $Pu = f$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$. Il nous reste à vérifier que u telle qu'on l'a définie est dans $H^{s+2}(\mathbb{R}^m)$.

(4)

On a:

$$(1+|\xi|^2)^{\frac{s+1}{2}} |\hat{u}| = (1+|\xi|^2) (1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}} |\hat{u}|$$

$$= \frac{1+|\xi|^2}{\lambda+|\xi|^2} (1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}} |\hat{f}|.$$

$$\leq \max\left(1, \frac{1}{\lambda}\right) (1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}} |\hat{f}|.$$

Or, comme $f \in H^s(\mathbb{R}^m)$, $(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}} |\hat{f}| \in L^2(\mathbb{R}^m)$. Ainsi,

$$(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}+1} |\hat{u}| \in L^2(\mathbb{R}^m) \quad \text{Donc } u \in H^{s+2}(\mathbb{R}^m).$$

Ainsi, si $f \in H^s(\mathbb{R}^m)$, il existe $u \in H^{s+2}(\mathbb{R}^m)$ telle que

$$Pu = f. \quad P \text{ est bien surjective.}$$

- Il reste à vérifier que P^{-1} est continue. Or, P est une bijection linéaire continue entre deux espaces de Banach, P^{-1} est donc continue par le théorème de l'isomorphisme de Banach.

⑤

Exercice 4:

1. Pour $t=0$, on a $u(0)=f \in \mathcal{Y}'(\mathbb{R})$ par hypothèse.

Puis, si $t>0$, $f \in \mathcal{Y}'(\mathbb{R})$ donc $\hat{f} \in \mathcal{Y}'(\mathbb{R})$ et $\xi \mapsto e^{-t\xi^2} \hat{f}(\xi) \in \mathcal{Y}'(\mathbb{R})$.

Donc $\xi \mapsto e^{-t\xi^2} \hat{f}(\xi) \in \mathcal{Y}'(\mathbb{R})$ et $F^{-1}(e^{-t\xi^2} \hat{f}) \in \mathcal{Y}'(\mathbb{R})$.

Donc: $\boxed{\forall t \geq 0, u(t) \in \mathcal{Y}'(\mathbb{R})}$.

2. On a: $F(u(t)) = e^{-t\xi^2} \hat{f}$, donc $\hat{u}(t)$ est une fonction mesurable

$$\text{et : } (1+|\xi|^2)^{s/2} |\hat{u}(t)(\xi)| = (1+|\xi|^2)^{s/2} |e^{-t\xi^2} \hat{f}(\xi)| \\ \leq (1+|\xi|^2)^{s/2} |\hat{f}(\xi)|.$$

Comme $f \in H^s(\mathbb{R})$, ce majorant est dans $L^2(\mathbb{R})$. Donc $u(t) \in H^s(\mathbb{R})$ et l'inégalité ci-dessus se réécrit:

$$\boxed{\|u(t)\|_{H^s(\mathbb{R})} \leq \|f\|_{H^s(\mathbb{R})}}$$

3. Pour $k \in \mathbb{N}$, $t>0$ et $\xi \in \mathbb{R}$, on a:

$$|F(D_x^k u(t))(\xi)| = |\xi^k \hat{u}(t)(\xi)| = |\xi|^k e^{-t\xi^2} |\hat{f}(\xi)|$$

- Si $k=0$, $C=1$ convient en majorant $e^{-t\xi^2}$ par 1 et en intégrant sur $\mathbb{R}$ puis en appliquant Plancherel.
- Supposons $k \geq 1$. On commence par déterminer:

$$\sup_{x \geq 0} x^k e^{-tx^2}.$$

$$\text{Soit } g: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+, g(x) = x^k e^{-tx^2}. \text{ Alors : } g'(x) = kx^{k-1} e^{-tx^2} - 2tx^k e^{-tx^2} \\ = x^{k-1} (k - 2tx^2) e^{-tx^2}.$$

$$\text{Alors : } g'(x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ \text{ou} \\ x = \sqrt{\frac{k}{2t}} \end{cases}.$$

$$\text{Puis : } g(0)=0 \text{ et } g\left(\sqrt{\frac{k}{2t}}\right) = \left(\sqrt{\frac{k}{2t}}\right)^k e^{-t \frac{k}{2t}} = e^{-\frac{k}{2}} \sqrt{\frac{k}{2t}} \frac{1}{t^{\frac{k}{2}}}.$$

$$\text{D'où, en posant } C_k = e^{-\frac{k}{2}} \sqrt{\frac{k}{2}} : \sup_{x \geq 0} x^k e^{-tx^2} = \frac{C_k}{t^{\frac{k}{2}}}.$$

⑥

Alors:

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad |\mathcal{F}(D_x^k u(t))(\xi)| \leq \frac{C_k}{t^{\frac{k}{2}}} |\hat{f}(\xi)|$$

$$\Rightarrow \forall \xi \in \mathbb{R}, \quad |\mathcal{F}(D_x^k u(t))(\xi)|^2 \leq \frac{C_k^2}{t^k} |\hat{f}(\xi)|^2$$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}} |\mathcal{F}(D_x^k u(t))(\xi)|^2 d\xi \leq \frac{C_k^2}{t^k} \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi$$

i.e.: $\|\mathcal{F}(D_x^k u(t))\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \frac{C_k}{t^{\frac{k}{2}}} \|\hat{f}\|_{L^2(\mathbb{R})}$

et par Plancherel (comme $f \in L^2(\mathbb{R})$, $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$ et $\mathcal{F}(D_x^k u(t))$ est aussi dans $L^2(\mathbb{R})$):

$$\|D_x^k u(t)\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \frac{C_k}{t^{\frac{k}{2}}} \|f\|_{L^2(\mathbb{R})} \text{ avec } C_k = e^{-\frac{k}{2}} \sqrt{\frac{k}{2}} > 0.$$

4.a. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. Soit $t > 0$. Alors $e^{-t\xi^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. De plus, comme $f \in L^1(\mathbb{R})$, $\hat{f} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Alors:

$$u(t)(x) = \mathcal{F}^{-1}(e^{-t\xi^2} \hat{f})(x) = (\mathcal{F}^{-1}(e^{-t\xi^2}) * f)(x)$$

On, comme $\mathcal{F}(e^{-tx^2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{t}} e^{-\frac{\xi^2}{4t}}$, on a:

$$\mathcal{F}^{-1}(e^{-t\xi^2}) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}.$$

D'où: $u(t)(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} (e^{-\frac{x^2}{4t}} * f)(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} f(y) dy$

b. On: $\forall y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, \forall t > 0, \quad |e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}| \leq 1$. D'où:

$$\forall t > 0, \quad \|u(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} |f(y)| dy = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \|f\|_{L^1(\mathbb{R})}.$$

(7)

5.a. On rappelle que la transformée de Fourier injecte continûment $L^1(\mathbb{R})$ dans $C_0^\infty(\mathbb{R})$, l'espace des fonctions continues qui tendent vers 0 à l'infini.

Donc, si $f \in L^1(\mathbb{R})$, $\hat{f} \in C_0^\infty(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$.

De plus, si $\chi f \in L^1(\mathbb{R})$, alors $\mathcal{D}_\xi \hat{f} \in C_0^\infty(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$.

$$\text{D'où: } \boxed{\hat{f} \in C^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})}$$

b. Soit $\xi \in \mathbb{R}$. Comme $\hat{f}$ est C^1 , on peut écrire: $\hat{f}(\xi) - \hat{f}(0) = \int_0^\xi \hat{f}'(u) du$
 $= \int_0^\xi \hat{f}'(s\xi) ds.$

$$\text{D'où: } |\hat{f}(\xi) - \hat{f}(0)| \leq |\xi| \|\hat{f}'\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \\ = |\xi| \|\chi f\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq |\xi| \|\chi f\|_{L^1(\mathbb{R})}.$$

$$\text{Donc: } \boxed{\forall \xi \in \mathbb{R}: |\hat{f}(\xi) - \hat{f}(0)| \leq |\xi| \|\chi f\|_{L^1(\mathbb{R})}}$$

c. Soit $t > 0$ et $\xi \in \mathbb{R}$. On a:

$$|\kappa(t, \xi)| = |\hat{f}(\xi) - \hat{f}(0)| e^{-\frac{1}{2}t\xi^2} \leq |\xi| e^{-\frac{1}{2}t\xi^2} \|\chi f\|_{L^1(\mathbb{R})}.$$

On par une étude analogue à celle menée à la question 3., on a:

$$\sup_{x \geq 0} x e^{-\frac{1}{2}tx^2} = \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{t}}$$

$$\text{D'où: } \boxed{|\kappa(t, \xi)| \leq \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{t}} \|\chi f\|_{L^1(\mathbb{R})}}$$

⑧

d. On a: $\forall \xi \in \mathbb{R}, \hat{f}(\xi) e^{-t\xi^2} = e^{-t\xi^2} \hat{f}(0) + e^{-\frac{1}{2}t\xi^2} w(t, \xi)$

D'où:
$$u(t) = \mathcal{F}^{-1}(e^{-t\xi^2}) \hat{f}(0) + \mathcal{F}^{-1}(e^{-\frac{1}{2}t\xi^2} w(t, \xi))$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \int_{\mathbb{R}} f(x) dx + \mathcal{F}^{-1}(e^{-\frac{1}{2}t\xi^2} w(t, \xi))$$

Posons $R(t)(x) = \mathcal{F}^{-1}(e^{-\frac{1}{2}t\xi^2} w(t, \xi))$.

Ainsi:
$$u(t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \int_{\mathbb{R}} f(x) dx + R(t)(x)$$

De plus: $\forall t > 0, |R(t)(x)| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} e^{-\frac{1}{2}t\xi^2} w(t, \xi) d\xi \right|$

par 5.c.
$$\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}t\xi^2} |w(t, \xi)| d\xi$$

$$\rightarrow \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}t\xi^2} \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{t}} \|x f\|_{L^1(\mathbb{R})} d\xi$$

$$= \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{2\pi\sqrt{t}} \|x f\|_{L^1(\mathbb{R})} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}t\xi^2} d\xi$$

Or:
$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}t\xi^2} d\xi = \mathcal{F}^{-1}(e^{-\frac{1}{2}t\xi^2})(0) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\frac{t}{2}}} e^{-\frac{(0)^2}{2t}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{t}}$$

Donc, si on pose $C = \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} > 0$, on a bien:

$\forall t > 0, |R(t)(x)| \leq \frac{C}{t} \|x f\|_{L^1(\mathbb{R})}$

Ainsi, $R(t) \in L^\infty(\mathbb{R})$ et:
$$\forall t > 0, \|R(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \frac{C}{t} \|x f\|_{L^1(\mathbb{R})}$$

⑨

Exercice 5:

1. Soit $s \in \mathbb{R}$. On a pour $a, b \geq 0$, $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$

D'où, comme : $\forall \xi, \eta \in \mathbb{R}^n$, $|\xi| \leq |\xi - \eta| + |\eta|$, on a:

$$|\xi|^2 \leq (|\xi - \eta| + |\eta|)^2 \leq 2|\xi - \eta|^2 + 2|\eta|^2.$$

Alors: $1 + |\xi|^2 \leq 1 + 2(|\xi - \eta|^2 + |\eta|^2)$

can $1 \leq 2$! $\rightarrow \leq 2(1 + |\xi - \eta|^2 + |\eta|^2)$
 can $|\xi - \eta|^2 |\eta|^2 \geq 0 \rightarrow \leq 2(1 + |\xi - \eta|^2)(1 + |\eta|^2) \quad (*)$

• Pour $s \geq 0$, il vient:

$$(1 + |\xi|^2)^s \leq 2^s (1 + |\xi - \eta|^2)^s (1 + |\eta|^2)^s.$$

• Pour $s < 0$, en échangeant les rôles de ξ et η dans (*), on a:

$$1 + |\eta|^2 \leq 2(1 + |\eta - \xi|^2)(1 + |\xi|^2)$$

D'où: $(1 + |\xi|^2)^{-1} \leq 2(1 + |\xi - \eta|^2)(1 + |\eta|^2)^{-1}$

En élevant à la puissance $-s \geq 0$:

$$(1 + |\xi|^2)^s \leq 2^{-s} (1 + |\xi - \eta|^2)^{-s} (1 + |\eta|^2)^s.$$

D'où: $\forall s \in \mathbb{R}$,

$$(1 + |\xi|^2)^s \leq 2^{|s|} (1 + |\xi - \eta|^2)^{|s|} (1 + |\eta|^2)^s$$

2. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Soit $s \geq 0$. Soit enfin $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$.

Alors, $\widehat{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $\widehat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ et $\widehat{\varphi u} = \frac{1}{(2\pi)^n} \widehat{\varphi} * \widehat{u}$.

10

Il vient:

$$\begin{aligned}\| \varphi u \|_{H^s(\mathbb{R}^n)}^2 &= \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^s |\widehat{\varphi u}(\xi)|^2 d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^s \left| \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\varphi}(\eta) \widehat{u}(\xi-\eta) d\eta \right|^2 d\xi \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^s \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{\varphi}(\eta)| |\widehat{u}(\xi-\eta)| d\eta \right)^2 d\xi.\end{aligned}$$

On applique Cauchy-Schwarz à la fonction $|\widehat{\varphi}(\eta)|^{\frac{1}{2}} |\widehat{\varphi}(\eta)|^{\frac{1}{2}} |\widehat{u}(\xi-\eta)|$ dans l'intégrale en η : $\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{\varphi}(\eta)| |\widehat{u}(\xi-\eta)| d\eta \right)^2 \leq \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{\varphi}(\eta)|^2 d\eta \right)}_{= \|\widehat{\varphi}\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^2} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{\varphi}(\eta)| |\widehat{u}(\xi-\eta)|^2 d\eta \right)$

Alors:

$$\begin{aligned}\| \varphi u \|_{H^s(\mathbb{R}^n)}^2 &\leq \|\widehat{\varphi}\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^s \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{\varphi}(\eta)| |\widehat{u}(\xi-\eta)|^2 d\eta \right) d\xi \\ &\stackrel{\text{Fubini-Tonelli}}{=} \|\widehat{\varphi}\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^s |\widehat{\varphi}(\eta)| |\widehat{u}(\xi-\eta)|^2 d\eta d\xi\end{aligned}$$

Or, pour ξ , $(1+|\xi|^2)^s \leq 2^s (1+|\xi-\eta|^2)^s (1+|\eta|^2)^s$, d'où:

$$\begin{aligned}\| \varphi u \|_{H^s(\mathbb{R}^n)}^2 &\leq \|\widehat{\varphi}\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} 2^s (1+|\eta|^2)^s |\widehat{\varphi}(\eta)| (1+|\xi-\eta|^2)^s |\widehat{u}(\xi-\eta)|^2 d\eta d\xi \\ &\stackrel{\text{Fubini-Tonelli}}{=} 2^s \|\widehat{\varphi}\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\eta|^2)^s |\widehat{\varphi}(\eta)| \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi-\eta|^2)^s |\widehat{u}(\xi-\eta)|^2 d\xi \right)}_{= \|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}^2} d\eta\end{aligned}$$

$$\text{Donc } \| \varphi u \|_{H^s(\mathbb{R}^n)}^2 \leq 2^s \|\widehat{\varphi}\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \left(\int_{\mathbb{R}^n} (1+|\eta|^2)^s |\widehat{\varphi}(\eta)| d\eta \right) \|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}^2 < +\infty$$

D'où $\varphi u \in H^s(\mathbb{R}^n)$ et $\exists C > 0$, $\| \varphi u \|_{H^s(\mathbb{R}^n)} \leq C_\varphi \|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}$

d'où la continuité de $H^s(\mathbb{R}^n) \rightarrow H^s(\mathbb{R}^n)$, $u \mapsto \varphi u$.