École Sup Galilée **2012-2013**
Filière MACS2
Mathématiques, Théorie Générale

Feuille de TD 1 : Introduction à la théorie des distributions

Exercice 1

Existe-t-il une fonction g intégrable sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $n\mathrm{e}^{-n|x|} \le g(x)$?

Exercice 2

Calculer,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t.$$

Exercice 3

1. Montrer que, pour tout $u \in [0,1[$, $u+\log(1-u) \le 0$.
2. Soit $\varphi \in C_0^\infty$. Calculer

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} \exp\left[\lambda^3 \log\left(1 - \frac{y^2}{\lambda^3}\right)\right] \varphi\left(\frac{y}{\lambda}\right) \mathrm{d}y.$$

Exercice 4 - Autour du Dirac

Soit $\varepsilon > 0$. On considère la fonction ϕ_1^ε définie sur $\mathbb{R}$ par $\phi_1^\varepsilon(x) = 0$ pour $|x| \ge \varepsilon$, et $\phi_1^\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^2}(\varepsilon - |x|)$ pour $|x| \le \varepsilon$.
1. Déterminer la limite simple lorsque ε tend vers 0 de $(\phi_1^\varepsilon)_\varepsilon$.
2. Calculer l'intégrale sur $\mathbb{R}$ de ϕ_1^ε.
3. On considère $\phi_2^\varepsilon(x) = \phi_1^\varepsilon(x - \varepsilon)$. Déterminer la limite simple lorsque ε tend vers 0 de ϕ_2^ε. Calculer son intégrale sur $\mathbb{R}$.
4. Soient a et b sont deux réels distincts. Déterminer, suivant la position relative de 0 par rapport à a et b, la valeur de la limite, lorsque ε tend vers 0, de l'intégrale $\int_a^b \phi_1^\varepsilon(x)dx$. On note cette limite $I_1(a,b)$. Que mesure cette limite ?
On définit

$$I_1^\varepsilon(\phi) = \int_{\mathbb{R}} \phi_1^\varepsilon(x)\phi(x)dx$$

où ϕ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et bornée.
5. Déterminer la limite lorsque ε tend vers 0 de $I_1^\varepsilon(\phi)$.
6. Vérifier qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\forall \varepsilon > 0,\ |I_1^\varepsilon(\phi)| \le C \max_{x\in\mathbb{R}} |\phi(x)|.$$

Exercice 5 - Le peigne de Dirac

On reprend les notations de l'exercice 4. On veut construire un réseau périodique infini de charges ponctuelles placées en tout point entier relatif. La fonction associée simple est alors

$$\Psi^\varepsilon(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \phi_1^\varepsilon(x - n).$$

1. Vérifier que pour ε suffisamment petit, $\Psi^\varepsilon \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$.
2. Soit ϕ une fonction de classe C^2. Soient $m < n$ deux entiers. Montrer que

$$\lim_{\varepsilon\to0} \int_{m-\varepsilon}^{n+\varepsilon} \Psi^\varepsilon(x)\phi(x)dx = \sum_{p=m}^{p=n} \phi(p).$$

3. Que peut-on supposer sur ϕ pour que l'on puisse faire tendre m vers $-\infty$ et n vers $+\infty$ dans l'expression précédente ?

Exercice 6

Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. On considère l'application

$$Tf \ :\ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \int_0^1 f(x-y)\mathrm{d}y \end{array}.$$

1. Montrer que, si f est continue à support compact, Tf est continue.
2. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues à support compact qui converge vers f dans $L^1(\mathbb{R})$. Montrer que $(Tf_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers Tf uniformément sur $\mathbb{R}$. En déduire que Tf est continue sur $\mathbb{R}$.
3. En déduire que le produit de convolution sur $L^1(\mathbb{R})$ n'admet pas d'élément unité.

Exercice 7

Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f \in L^1_{\text{loc}}(I)$. On suppose que :

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(I), \int_I f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Soit $[a,b] \subset I$ un intervalle.

1. En utilisant un argument de densité, montrer que :

$$\forall g \in C_0(I),\ \text{supp } g \subset [a,b], \int_{[a,b]} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

2. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $h_\varepsilon \in C_0(]a,b[)$ telle que

$$\int_{[a,b]} |f(x) - h_\varepsilon|\,\mathrm{d}x \leq \varepsilon.$$

Montrer que :

$$\forall g \in C_0(]a,b[), \left|\int_{[a,b]} h_\varepsilon(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \varepsilon ||g||_\infty.$$

3. En choisissant bien $g \in C_0(]a,b[)$, montrer que $\int_{[a,b]} |h_\varepsilon|\,\mathrm{d}x \leq \varepsilon$.

4. En déduire que $f = 0$ presque partout sur I.