École Sup Galilée **2012-2013**
Filière MACS2
Mathématiques, Théorie Générale

Feuille de TD 3 : Distributions - Dérivation.

Exercice 1

Soit H la fonction indicatrice de $\mathbb{R}_+$.

1. Montrer que $H' = \delta_0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

2. Montrer que $(\log|x|)' = \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right)$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

3. Montrer que, dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$,

$$\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right)' = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{|x|>\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x - \frac{2\varphi(0)}{\varepsilon}\right) = \mathrm{Pf}\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Exercice 2

On considère l'opérateur différentiel $P = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + a\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, agissant sur $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.
Soient f et g deux fonctions de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ telles que $Pf = Pg = 0$, $f(0) = g(0)$ et $f'(0) - g'(0) = 1$. On considère la fonction h définie par

$$\forall x\in\mathbb{R},\ h(x) = \left\{\begin{array}{lll} f(x) & \text{si} & x\le 0\\ g(x) & \text{si} & x>0.\end{array}\right.$$

Soit enfin T la distribution définie par,

$$\forall\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}),\ <T,\varphi> = -\int_{\mathbb{R}} h(x)\varphi(x)\mathrm{d}x.$$

Montrer que $PT = \delta_0$, au sens des distributions.

Exercice 3

1. Résoudre, dans l'ensemble des fonctions localement intégrables sur $\mathbb{R}$, l'équation différentielle : $2xu' - u = 0$.

2. Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ une solution de l'équation $2xT' - T = 0$. Soit T_1 sa restriction à $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+^*)$ et soit T_2 sa restriction à $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_-^*)$.

a. Calculer T_1 et T_2.

b. Soit $S = T - T_1 - T_2$. Vérifier que le support de S est inclus dans $\{0\}$.

c. Soit $R = \sum_{k=0}^{p} a_k\delta^{(k)} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ où les a_k sont dans $\mathbb{C}$. Montrer que : $2xR' - R = 0 \iff R = 0$.

d. En déduire les solutions dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ de l'équation $2xT' - T = 0$.

3. Résoudre, dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, l'équation différentielle :

$$2xT' - T = \delta_0.$$

Exercice 4

Soit h un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit T l'application linéaire de $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$$\forall\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^2),\ <T,\varphi> = \int_{\mathbb{R}}\varphi(x,h(x))\,\mathrm{d}x.$$

1. Montrer que $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$. Quel est son ordre ?

2. Déterminer le support de T.

3. En déduire qu'il n'existe pas de fonction continue sur $\mathbb{R}^2$ telle que T soit la distribution associée à cette fonction.

4. Calculer, au sens des distributions, $(\partial_x + h'(x)\partial_y)T$.

Exercice 5 - Équation de la chaleur

Soit H la fonction indicatrice de $\mathbb{R}_+^*$. On considère la fonction sur $\mathbb{R}^2$ donnée par :

$$\forall(x,t)\in\mathbb{R}^2,\ E(x,t) = \frac{H(t)}{\sqrt{4\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}.$$

1. Montrer que E définit une distribution sur $\mathbb{R}^2$.

2. Montrer que, pour tout $t > 0$ et tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\partial_t\left(\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}\right) = \partial_{xx}^2\left(\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}\right).$$

3. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$. On pose :

$$I_\varepsilon = -\int_{\mathbb{R}}\int_\varepsilon^{+\infty}\frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}}\partial_t\varphi(x,t)\,\mathrm{d}t\mathrm{d}x,$$

et

$$J_\varepsilon = -\int_{\mathbb{R}}\int_\varepsilon^{+\infty}\frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}}\partial_{xx}^2\varphi(x,t)\,\mathrm{d}t\mathrm{d}x.$$

a. Calculer $I_\varepsilon + J_\varepsilon$.

b. En effectuant le changement de variable $y = \frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}$, déterminer la limite, lorsque ε tend vers 0, de $I_\varepsilon + J_\varepsilon$.

Indication : on pourra utiliser que $\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{u^2}{4}}\,\mathrm{d}u = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

4. Calculer $(\partial_t - \partial_{xx}^2)E$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$.

Exercice 6 - Équation de Cauchy-Riemann

On considère sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ la fonction donnée par :

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{0\},\ f(x,y) = (x + \mathrm{i}y)^{-1}.$$

1. Montrer que $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$.

2. Soit $\bar\partial$ l'opérateur de Cauchy-Riemann définit par : $\bar\partial = \frac{1}{2}(\partial_x + \mathrm{i}\partial_y)$. Calculer $\bar\partial f$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$.

Indication : on pensera à effectuer un changement de variables en coordonnées polaires.