École Sup Galilée **2012-2013**
Filière MACS2
Mathématiques, Théorie Générale

Feuille de TD 4 : Distributions - Suites et convolution

Exercice 1

Calculer les limites, dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, des suites de distributions suivantes :

$$A_n = \sin(nx), \quad B_n = ng(nx) \text{ où } g \in L^1(\mathbb{R}),$$

$$C_n = \frac{1}{n}\sum_{p=0}^{n-1} \delta_{\frac{p}{n}}, \quad D_n = e^{inx}\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right).$$

Exercice 2

On note T_n, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la distribution associée à la fonction localement intégrable $t \mapsto \frac{\sin(nt)}{\pi t}$. Montrer que la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ vers la distribution δ_0. *Indication : on pourra se servir de l'identité* $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$

Exercice 3

Montrer que la suite de distributions $(T_n)_{n\geq 1}$ définie par :

$$\forall n \geq 1, \; T_n = n(\delta_{\frac{1}{n}} - \delta_{-\frac{1}{n}}),$$

converge dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. L'ordre de la limite d'une suite de distributions d'ordre m est-il toujours m ?

Exercice 4

1. Calculer $\delta_0' \star \delta_0'$ pour $\delta_0 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.
2. Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une distribution $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, à support compact, telle que $E \star T = T^{(k)}$.
3. Soient T et S dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, S étant supposée à support compact. Pour $n \in \mathbb{N}$, on désigne par X^n la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $x \mapsto x^n$. Démontrer la formule suivante :

$$X^n(T \star S) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (X^k T) \star (X^{n-k} S).$$

Exercice 5

On note $\mathcal{D}'_+(\mathbb{R}) = \{T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}); \mathrm{supp}\, T \subset [0, +\infty[\}$. Soit $\chi \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que, $\chi = 1$ sur $]-\frac{1}{2}, +\infty[$ et $\chi = 0$ sur $]-\infty, -1[$.
1.a. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Montrer que l'application

$$\varphi^\Delta : (x, y) \mapsto \chi(x)\chi(y)\varphi(x + y),$$

est dans $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$.
b. Soient $T, S \in \mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$. On définit

$$< T \star S, \varphi > = < T_x \otimes S_y, \varphi^\Delta > .$$

Montrer que $T \star S$ est bien définie et est indépendante du choix de χ.
c. Montrer que $T \star S \in \mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$.
2. On dit que $T \in \mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$ est inversible, s'il existe $S \in \mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$ telle que $T \star S = \delta_0$. On note $S = T^{-1}$.
a. Montrer que δ_0' est inversible et calculer son inverse.
b. Montrer que, si $T \in C_0^\infty(]0, +\infty[)$, T n'est pas inversible.

Exercice 6 - Équation des ondes 1D

On considère la distribution de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ donnée par la fonction intégrable :

$$\forall (t, x) \in \mathbb{R}^2, \; E(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si} \quad t - |x| > 0 \\ 0 & \text{si} \quad t - |x| \leq 0 \end{cases} .$$

1. Calculer $(\partial_{tt}^2 - \partial_{xx}^2)E$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$.
2. En déduire une solution $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ de l'équation aux dérivées partielles :

$$\partial_{tt}^2 u - \partial_{xx}^2 u = f,$$

où $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ est à support compact.
3. Si $f \in C_0^\infty(\Omega)$, Ω ouvert de $\mathbb{R}^2$, que peut-on dire de u ?

Exercice 7 - Équation de Laplace

Soit $d \geq 1$. On considère la distribution de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ donnée par la fonction localement intégrable :

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \; E(x) = \begin{cases} x_+ = \max(x, 0) & \text{si} \quad d = 1 \\ \frac{1}{2\pi}\log|x| & \text{si} \quad d = 2 \\ -\frac{1}{(d-2)\sigma(S^{d-1})}\frac{1}{|x|^{d-2}} & \text{si} \quad d \geq 3 \end{cases} ,$$

où $\sigma(S^{d-1})$ désigne l'aire de la sphère unité de $\mathbb{R}^d$.
1. Pour $d = 1$, vérifier que $E'' = \delta_0$.
2. On suppose dans la suite $d \geq 2$. Soit f $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 et soit $F \in C^2(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}, F(x) = f(|x|)$. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}, \; \Delta F(x) = f''(|x|) + \frac{d-1}{|x|} f'(|x|).$$

3. Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle :

$$f''(r) + \frac{d-1}{r} f'(r) = 0.$$

4. Soit $F : \mathbb{R}^d \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ la fonction localement intégrable donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\},\ F(x) = \begin{cases} \log|x| & \text{si} \quad d = 2 \\ \frac{1}{|x|^{d-2}} & \text{si} \quad d \geq 3 \end{cases} .$$

Soit $\varepsilon > 0$ et soit Ω_ε l'ouvert $\mathbb{R}^d \setminus B(0, \varepsilon)$. Soit enfin $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. En appliquant la formule de Green à F et φ sur l'ouvert Ω_ε, puis en faisant tendre ε vers 0, calculer $< \Delta F, \varphi >$.

5. En déduire que $\Delta E = \delta_0$, pour tout $d \geq 2$.

6. On admet le théorème de Liouville (version faible) : *Soit $u \in C^\infty(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$ telle que $\Delta u = 0$. Si $u(x)$ tend vers 0 lorsque $|x|$ tend vers l'infini alors u est nulle.*

a. Soit $\rho \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$ une distribution à support compact. Montrer que l'équation $-\Delta V = \rho$ admet une unique solution qui tend vers 0 à l'infini.

b. Calculer l'expression de cette solution pour $\rho = \delta_0$ (charge unique à l'origine) et pour $\rho = \delta'_{x_0}$ avec $x_0 \neq 0$ (cas du dipôle).