

Feuille de TD 5 : Distributions tempérées - Transformée de Fourier

Exercice 1

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = e^x \cos(e^x)$.

Montrer qu'il n'existe pas de polynôme P tel que : $\forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq |P(x)|$.

2. Montrer que, pour toute $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)dx$ est convergente.

3. Montrer que S définie par : $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \langle S, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)dx$, est une distribution tempérée sur \mathbb{R} .

Exercice 2

Résoudre dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ l'équation différentielle $u' + u = \delta_0$. Quelles en sont les solutions tempérées ?

Exercice 3 - Transformée de Fourier de la gaussienne

Soit $a > 0$ un réel. On considère la fonction gaussienne $f : x \mapsto e^{-ax^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

1. A l'aide du théorème de Fubini et d'un changement de variables en polaires, calculer $(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx)^2$.

2. Montrer que la transformée de Fourier de f , $\xi \mapsto \hat{f}(\xi)$ est solution de l'équation différentielle $y' + \frac{\xi}{2a}y = 0$. Donner la solution générale de cette équation différentielle.

3. A l'aide de la question 1, déterminer \hat{f} .

Exercice 4

Calculer la transformée de Fourier des distributions tempérées sur \mathbb{R} associées aux fonctions suivantes :

1. e^{iax} ($a \in \mathbb{R}$),
2. $\cos(x)$,
3. $x \sin(x)$,
4. $\frac{\sin(x)}{x}$
5. $e^{-a|x|}$ ($a > 0$),
6. $|x|e^{-a|x|}$ ($a > 0$),
7. $\sin(|x|)$.

Exercice 5

On note $T = \text{vp}(\frac{1}{x})$ la distribution valeur principale sur \mathbb{R} . On note aussi H la distribution de Heaviside, distribution associée à la fonction caractéristique de \mathbb{R}^+ .

1. Montrer que $xT = 1$ au sens des distributions.
2. En appliquant la transformée de Fourier à l'égalité $xT = 1$, montrer qu'il existe une constante C telle que

$$\hat{T} = -2i\pi H + C.$$

3. Soit \tilde{T} la distribution définie par

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}), \langle \tilde{T}, \varphi \rangle = \langle T, \check{\varphi} \rangle,$$

où : $\forall x \in \mathbb{R}, \check{\varphi}(x) = \varphi(-x)$. Justifier que $\tilde{T} = -T$ (on rappelle qu'ici $T = \text{vp}(\frac{1}{x})$). En déduire que pour toute $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}), \langle \hat{T}, \check{\varphi} \rangle = \langle -\hat{T}, \varphi \rangle$.

4. Déduire de la question précédente la valeur de la constante C obtenue à la question 2.

5. En utilisant ce qui précède et le fait que $\tilde{T} = -T$, calculer \hat{H} .

Exercice 6 - Principe d'incertitude de Heisenberg

Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ de norme $\|f\|_{L^2(\mathbb{R})} = 1$. On veut montrer l'inégalité suivante :

$$(1) := \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 |f(x)|^2 dx \right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \xi^2 |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \right) \geq \frac{1}{4}.$$

1. En utilisant la relation $\widehat{f'}(\xi) = i\xi \hat{f}(\xi)$, montrer que

$$(1) = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 |f(x)|^2 dx \right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f'(x)|^2 dx \right).$$

2. En déduire que $(1) \geq \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |xf(x)f'(x)| dx \right)^2$.

3. Justifier que pour deux nombres complexes a et b , on a $|ab| \geq \frac{1}{2}(a\bar{b} + \bar{a}b)$. Justifier que pour tout $x \in \mathbb{R}, \frac{d}{dx}|f(x)|^2 = f(x)\overline{f'(x)} + \overline{f(x)}f'(x)$.

4. Déduire l'inégalité recherchée des questions 2 et 3. Interpretez cette inégalité en termes probabilistes.

Exercice 7

Soit $P(\xi)$ un polynôme dans \mathbb{R}^n non identiquement nul. On note $P(D)$ l'opérateur différentiel à coefficients constants associé. Montrer que si $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ est telle que $P(D)u = 0$, alors $u = 0$.

Exercice 8

On notera dans ce qui suit δ_a la distribution de Dirac au point a . On définit par récurrence la suite de distributions $(T_k)_{k \geq 1}$ par :

$$T_1 = \frac{1}{2}(\delta_1 + \delta_{-1}) \text{ et } \forall k \geq 2, T_k = T_{k-1} \star T_1.$$

1. Écrire T_k comme combinaison linéaire finie de distributions à supports ponctuels.

2. Calculer la transformée de Fourier \hat{T}_k de la distribution à support compact T_k .

3. Pour $k \geq 1$, on pose $f_k(\xi) = \hat{T}_k\left(\frac{\xi}{\sqrt{k}}\right)$. Montrer que $f_k \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ et que la suite $(f_k)_{k \geq 1}$ converge dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ vers une distribution que l'on déterminera.

4. On note g_k la distribution dont f_k est la transformée de Fourier. Montrer que la suite $(g_k)_{k \geq 1}$ converge dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ vers une distribution que l'on déterminera.

Indication : On pourra utiliser le fait que, pour $a > 0$, $\mathcal{F}(e^{-ax^2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{a} e^{-\frac{\xi^2}{4a}}$.