

Feuille de TD 6 : Espaces de Sobolev.

Exercice 0 - Rappel de cours

On désigne par $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ l'ensemble des distributions tempérées sur $\mathbb{R}^d$. On introduit les espaces de Sobolev pour $s \in \mathbb{R}$:

$$H^s(\mathbb{R}^d) = \{u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) \mid (1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \hat{u}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^d)\}$$

Et si $u \in H^s(\mathbb{R}^d)$ on pose : $\|u\|_{H^s} = \|(1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \hat{u}\|_{L^2}$. Muni de cette norme, $H^s(\mathbb{R}^d)$ est un espace de Banach.

Démontrer le théorème d'injection de Sobolev : Si $u \in H^s(\mathbb{R}^d)$ avec $s > \frac{d}{2}$, alors u est continue, tend vers 0 à l'infini et $\|u\|_{L^\infty} \leq C\|u\|_{H^s}$.

Exercice 1

Étudier l'appartenance des distributions suivantes à l'espace de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^n)$ en fonction de $s \in \mathbb{R}$ et de $n \geq 1$: δ_0 , δ'_0 , $\delta_0^{(k)}$ ($k \in \mathbb{N}^n$). Puis, pour $n = 1$, H la fonction de Heaviside.

Exercice 2

Soit $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ telle que $\Delta(\Delta u) + 2\Delta u - u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ où $\Delta = \sum_{j=1}^n \partial_j^2$. Montrer que $u \in H^4(\mathbb{R}^n)$.

Exercice 3

Soit $\lambda > 0$. Montrer que l'opérateur différentiel $P = -\Delta + \lambda$ est un isomorphisme de $H^{s+2}(\mathbb{R}^n)$ dans $H^s(\mathbb{R}^n)$ pour tout $s \in \mathbb{R}$.

Exercice 4

Pour $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ et $t \geq 0$, on pose $u(t) = \mathcal{F}^{-1}(e^{-t\xi^2} \hat{f})$.

1. Montrer que pour tout $t \geq 0$, $u(t) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.
2. Montrer que si $f \in H^s(\mathbb{R})$ alors, pour tout $t \geq 0$, on a $u(t) \in H^s(\mathbb{R})$ et

$$\|u(t)\|_{H^s(\mathbb{R})} \leq \|f\|_{H^s(\mathbb{R})}.$$

3. On suppose que $f \in L^2(\mathbb{R})$. On note $D_x = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x}$. Montrer que, pour tout $t > 0$ et tout $k \in \mathbb{N}$, on a $D_x^k u(t) \in L^2(\mathbb{R})$ et qu'il existe une constante $C_k > 0$ telle que

$$\|D_x^k u(t)\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \frac{C_k}{t^{k/2}} \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$

- 4.a. On suppose que $f \in L^1(\mathbb{R})$. Montrer que pour tout $t > 0$, on a

$$u(t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} f(y) dy.$$

Indication : On pourra utiliser que la transformée de Fourier de $u(x) = e^{-ax^2}$ pour $a > 0$ est donnée par $\hat{u}(\xi) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}} e^{-\frac{\xi^2}{4a}}$.

- b. En déduire une majoration de $u(t)$ dans $L^\infty(\mathbb{R})$ pour $t > 0$.

5. On suppose que $f \in L^1(\mathbb{R})$ et que $xf \in L^1(\mathbb{R})$.

- a. Montrer que $\hat{f} \in C^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$.

- b. Montrer que pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, on a

$$|\hat{f}(\xi) - \hat{f}(0)| \leq |\xi| \|xf\|_{L^1(\mathbb{R})}.$$

- c. On pose $v(t, \xi) = (\hat{f}(\xi) - \hat{f}(0)) e^{-\frac{1}{2}t\xi^2}$. Montrer qu'il existe $C > 0$ telle que

$$|v(t, \xi)| \leq \frac{C}{\sqrt{t}} \|xf\|_{L^1(\mathbb{R})}.$$

- d. En déduire que l'on peut écrire

$$\forall x \in \mathbb{R}, u(t)(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x) dx \right) e^{-\frac{x^2}{4t}} + R(t)(x)$$

où $R(t) \in L^\infty(\mathbb{R})$ et qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\forall t > 0, \|R(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \frac{C}{t} \|xf\|_{L^1(\mathbb{R})}.$$

Exercice 5

1. Soit $s \in \mathbb{R}$. Démontrer l'inégalité

$$\forall \xi, \eta \in \mathbb{R}^n, (1 + |\xi|^2)^s \leq 2^{|s|} (1 + |\xi - \eta|)^{|s|} (1 + |\eta|)^s$$

2. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Montrer que pour tout $s \geq 0$, l'application $u \mapsto \varphi u$ est continue de $H^s(\mathbb{R}^n)$ dans lui-même.