École Sup Galilée **2012-2013**
Filière MACS2
Mathématiques, Théorie Générale

Devoir maison 1 : Distributions

Ce devoir est à rendre au secrétariat de la MACS pour le vendredi 29 mars 2013 à 12h au plus tard. Le plus grand soin sera apporté à la rédaction des démonstrations.

Exercice 1

Pour $\lambda \in]0, +\infty[$ on pose,

$$F(\lambda) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda t} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t.$$

Montrer que $\lambda \mapsto F(\lambda)$ est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$.

Exercice 2

1. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(x) = \varphi(0) + \varphi'(0)x + x^2\psi(x) \quad \text{et} \quad \sup_{x\in\mathbb{R}} |\psi(x)| \leq \sup_{x\in\mathbb{R}} |\varphi''(x)|.$$

2. Soient $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ et $\varepsilon > 0$. On pose

$$I_\varepsilon(\varphi) := \int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2}\, \mathrm{d}x - \frac{2\varphi(0)}{\varepsilon}.$$

Montrer que la limite $\lim_{\varepsilon\to 0}\ I_\varepsilon(\varphi)$ existe.
3. On pose, pour toute $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$,

$$< \mathrm{Pf}\left(\frac{1}{x^2}\right), \varphi >:= \lim_{\varepsilon\to 0}\ I_\varepsilon(\varphi).$$

Montrer que l'on définit ainsi une distribution sur $\mathbb{R}$ d'ordre au plus 2.
4. Montrer que, dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$,

$$\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right)' = -\mathrm{Pf}\left(\frac{1}{x^2}\right).$$