École Sup Galilée **2012-2013**
Filière MACS2
Mathématiques, Théorie Générale

Devoir maison 2 : Dérivation et suites de distributions

Ce devoir est à rendre pour le 25 avril 2013 avant midi au secrétariat. Le plus grand soin sera apporté à la rédaction des démonstrations.

Exercice 1

Soit $I =]a, b[$ et f et g deux fonctions de classe C^∞ sur I. On se propose de montrer que si $T \in \mathcal{D}'(I)$ vérifie $T' + fT = g$ au sens des distributions, alors T est donnée par une fonction C^∞ sur I qui vérifie cette équation différentielle au sens usuel.

1. Trouver une solution u_0 de $u' + fu = g$ qui soit de classe C^∞ sur I.

2. Conclure en mettant toute solution de $T' + fT = g$ sous la forme $T = u_0 + S\mathrm{e}^{-F}$ où F est une primitive de f et S une distribution à déterminer.

Exercice 2

Soit $N \in \mathbb{N}$. On pose :

$$F_N \ : \ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-N}^{N} e^{\mathrm{i}kt} \end{array}.$$

La fonction $F_N \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$. On note T_N la distribution associée à F_N.

1. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$,

$$F_N(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin(\frac{(2N+1)t}{2})}{\sin \frac{t}{2}}.$$

2. Soit $M \in \mathbb{N}$. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ dont le support est inclus dans $[-(2M+1)\pi, (2M+1)\pi]$. Montrer que :

$$< T_N, \varphi >= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(\frac{(2N+1)t}{2})}{\sin \frac{t}{2}} \phi(t) \,\mathrm{d}t,$$

où, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\phi(t) = \sum_{k=-M}^{M} \varphi(t + 2k\pi).$$

3. En écrivant $\phi(t) = \phi(0) + t\psi(t)$ où ψ est de classe C^∞, montrer que la suite $(T_N)_{N \in \mathbb{N}}$ converge dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ vers la distribution $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_{2\pi n}$.