Devoir maison 3 : Transformée de Fourier

Ce devoir est à rendre pour le vendredi 14/06/2013 au plus tard à midi au secrétariat. Le plus grand soin sera apporté à la rédaction des démonstrations.

Exercice 1 - Théorème d'échantillonage de Shannon

Dans cet exercice, on cherche à démontrer le théorème d'échantillonage de Shannon qui stipule que si un signal a ses fréquences dans un intervalle $[-M, M]$ donné, alors on peut reconstituer de manière exacte ce signal en le mesurant $2M$ fois. C'est un résultat fondamental en télécommunications.

Soit donc $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ telle que le support de $\hat{f}$ soit inclus dans l'intervalle $[-\pi, \pi]$ (on prend ici un intervalle de fréquences $[-M, M]$ de longueur 2π pour simplifier les notations). On considère ensuite la fonction g périodique de période 2π qui coincide avec $\hat{f}$ sur $[-\pi, \pi]$. On note $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ la suite des coefficients de Fourier de g :

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(\xi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\xi}\mathrm{d}\xi.$$

On rappelle les conventions de notations,

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\xi}\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\xi}\mathrm{d}\xi.$$

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{Z},\ c_n = f(-n)$.

2. En utilisant la transformée de Fourier inverse et la question 1, montrer que

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{f(-n)}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+t)\xi}\mathrm{d}\xi.$$

On veillera à bien justifer l'interversion somme-intégrale.

3. En déduire que

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(-n)\frac{\sin(\pi(n+t))}{\pi(n+t)}$$

et conclure.

Tourner la page svp

Exercice 2

Soit $P(D) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha D^\alpha$ un opérateur différentiel sur $\mathbb{R}^n$ à coefficients constants tel que :

$$\Sigma := \left\{ \xi \in \mathbb{R}^n \ ; \ P(\xi) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n, |\alpha|\leq m} a_\alpha \xi^\alpha = 0 \right\} = \{0\}.$$

On veut montrer que le noyau de $P(D)$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ est constitué de polynômes.

1. Soit $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ telle que $P(D)u = 0$. Justifier que $P(\xi)\hat{u}(\xi) = 0$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$.

2. En déduire que supp $\hat{u} \subset \Sigma$.

3. Justifier l'existence d'une famille finie de nombres complexes $(c_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}^n, |\alpha|\leq N}$ telle que

$$\hat{u} = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n, |\alpha|\leq N} c_\alpha \delta_0^{(\alpha)}.$$

4. Conclure en utilisant la transformée de Fourier inverse.