Université Paris 13, Institut Galilée
Filière Ingénieur MACS, 2ème année
Année universitaire 2013-2014

Examen de Distributions

Le 28 avril 2014

Durée de l'épreuve : 3 heures.
Le sujet comporte deux pages.
Les documents, calculatrices et moyens de communication sont interdits.

Exercice 1. (Compétences de bases).

1. Soient $k \in \mathbb{N}$ et $d \geq 1$. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$. Donner la définition d'une distribution d'ordre au plus k sur Ω.
2. Définir la distribution de Dirac en 0, $\delta_0 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Calculer sa dérivée dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.
3. Soit H la distribution de Heaviside, distribution associée à la fonction caractéristique de $]0, +\infty[$. Calculer sa dérivée H' dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.
4. Pour tout $n \geq 1$, on considère la distribution $T_n = n\left(\delta_{\frac{1}{n}} - \delta_{-\frac{1}{n}}\right)$. Montrer que la suite $(T_n)_{n\geq 1}$ converge dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et calculer sa limite dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.
5. Soit $\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right)$ la distribution valeur principale de $\frac{1}{x}$ définie par
$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}),\ \left\langle \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right), \varphi \right\rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} \mathrm{d}x.$$
Montrer que $x\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right) = 1$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Exercice 2. (Compétences attendues).
Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $k \geq 1$ un entier et $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, on pose
$$< T_{\lambda,k}, \varphi >= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(\lambda x)}{x^k} \left(\varphi(x) - \sum_{i=0}^{k-1} \varphi^{(i)}(0) \frac{x^i}{i!} \right) \mathrm{d}x$$

1. Montrer qu'il existe une fonction $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(x) - \sum_{i=0}^{k-1} \varphi^{(i)}(0) \frac{x^i}{i!} = x^k \psi(x) \quad \text{et} \quad \sup_{x\in\mathbb{R}} |\psi(x)| \leq \sup_{x\in K} |\varphi^{(k)}(x)|$$
où K est un compact tel que $\mathrm{supp}\, \varphi \subset K$.
2. En déduire que $T_{\lambda,k}$ est une distribution d'ordre au plus k sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que $\mathrm{supp}\, T_{\lambda,k} \subset \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
4. Montrer que $\mathrm{supp}\, T_{\lambda,k} = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
5. En utilisant la première question, montrer que pour $k \geq 1$ fixé, $(T_{\lambda,k})_{\lambda\in\mathbb{R}}$ tend vers 0 dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ lorsque λ tend vers $+\infty$.
6. Pour $k \geq 1$ fixé, calculer la limite de $(T_{\lambda,k})_{\lambda\in\mathbb{R}}$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ lorsque λ tend vers 0.

Exercice 3. (Compétences attendues). On considère la distribution de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ donnée par la fonction intégrable :

$$\forall (t,x) \in \mathbb{R}^2,\ E(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si} \quad t-|x|>0 \\ 0 & \text{si} \quad t-|x| \leq 0 \end{cases}.$$

1. Calculer $(\partial_{tt}^2 - \partial_{xx}^2)E$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$.
2. En déduire une solution $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ de l'équation aux dérivées partielles :

$$\partial_{tt}^2 u - \partial_{xx}^2 u = f,$$

   où $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ est à support compact.
3. Si $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, que peut-on dire de plus de u?

Exercice 4. (Compétences avancées) Soit $d \geq 1$. Soit $V \in C^0(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ une fonction continue de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$ telle que : $\forall x \in \mathbb{R}^d,\ V(x) \geq 1$. Soit $u \in L^2(\mathbb{R}^d) \cap C^2(\mathbb{R}^d)$, à valeurs réelles et solution de l'équation aux dérivées partielles dans $\mathbb{R}^d$:

$$-\Delta u + Vu = 0.$$

On se propose de montrer que u est identiquement nulle.

1. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}^d,\ \Delta(u^2)(x) \geq 2(u(x))^2.$$

2. On désigne par $\mathbb{S}^{d-1}$ la sphère unité de $\mathbb{R}^d$. Soit $\omega \in \mathbb{S}^{d-1}$ et soit $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^d)$. On considère la fonction g définie sur $I =]0,+\infty[$ par $g(r) = \varphi(r\omega)$. Montrer que, pour tout $r \in I$ on a

$$g'(r) = \frac{\partial \varphi}{\partial \nu}(r\omega)$$

   où $\frac{\partial}{\partial \nu} = \sum_{i=1}^d \nu_i . \frac{\partial}{\partial x_i}$ désigne la dérivée normale extérieure à $B = \{x \in \mathbb{R}^d \mid |x| < r\}$. On rappelle que le vecteur normal unitaire sortant pour la boule B est donné en tout point $x = (x_1, \dots, x_d) \in r\mathbb{S}^{d-1}$ par $\nu(x) = (\frac{x_1}{r}, \dots, \frac{x_d}{r})$.
3. Justifier que pour tout $r > 0$,

$$I(r) := \int_{|x|<r} \Delta(u^2)(x)\mathrm{d}x = \int_{|x|=r} \frac{\partial(u^2)}{\partial \nu}(x)\mathrm{d}\sigma$$

   où $\mathrm{d}\sigma$ désigne la mesure de surface sur la sphère de centre 0 et de rayon r.
4. On pose $F(r) = r^{d-1} \int_{\omega \in \mathbb{S}^{d-1}} u^2(r\omega)\mathrm{d}\omega$.
   (a) Montrer que F est dérivable sur I et calculer $F'(r)$ pour tout $r \in I$.
   (b) Déduire des questions précédentes que : $\forall r > 0,\ F'(r) \geq r^{d-1} I(r) \geq 0$.
   (c) Justifier que $\int_0^{+\infty} F(r)\mathrm{d}r = ||u||_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 < +\infty$.
   (d) Déduire des questions précédentes que : $\forall r > 0,\ F(r) = 0$. Conclure.