Université Paris 13, Institut Galilée
Filière Ingénieur MACS, 2ème année
Année universitaire 2013-2014

Examen de rattrapage de Distributions

Le 5 septembre 2014

Durée de l'épreuve : 2 heures.
Les documents, calculatrices et moyens de communication sont interdits.

Exercice 1. (Compétences de bases).

1. Soient $k \in \mathbb{N}$ et $d \geq 1$. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$. Donner la définition d'une distribution d'ordre au plus k sur Ω.
2. Existe-t-il une fonction g intégrable sur $\mathbb{R}$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ n\mathrm{e}^{-n|x|} \leq g(x)$?
3. Définir la distribution de Dirac en 0, $\delta_0 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.
4. Soit H la distribution de Heaviside, distribution associée à la fonction caractéristique de $]0, +\infty[$. Calculer sa dérivée H' dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.
5. Pour tout $n \geq 1$, on considère la distribution T_n associée à la fonction localement intégrable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, $e_n : x \mapsto e^{inx}$. Montrer que la suite $(T_n)_{n\geq 1}$ converge dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et calculer sa limite dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Exercice 2. (Compétences attendues). Soient $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ et $\varepsilon > 0$.

1. Justifier que l'on peut écrire, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \varphi(0) + x\psi(x)$ où ψ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
2. Pour $\alpha \in]-2, -1[$, montrer que :
$$\int_\varepsilon^\infty x^\alpha \varphi(x)\, \mathrm{d}x = A_\varphi \varepsilon^{\alpha+1} + R_\varepsilon$$
où $A_\varphi \in \mathbb{R}$ ne dépend pas de ε et où R_ε tend vers une limite finie lorsque ε tend vers 0^+.
3. On pose, pour toute $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$: $< \mathrm{pf}(x^\alpha), \varphi >= \lim_{\varepsilon\to 0^+} R_\varepsilon$. Montrer que $\mathrm{pf}(x^\alpha)$ est une distribution d'ordre au plus 1.

Exercice 3. (Compétences attendues).
Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose :
$$F_n \ : \ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-n}^{n} e^{\mathrm{i}kt} \end{array}.$$
La fonction F_n est localement intégrable. On note T_n la distribution associée à F_n.

1. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$,
$$F_n(t) = \frac{1}{2\pi}\frac{\sin(\frac{(2n+1)t}{2})}{\sin\frac{t}{2}}.$$
2. Soit $M \in \mathbb{N}$. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ dont le support est inclus dans $[-(2M+1)\pi, (2M+1)\pi]$. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ < T_n, \varphi >= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(\frac{(2n+1)t}{2})}{\sin\frac{t}{2}}\phi(t)\, \mathrm{d}t,$$
où, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\phi(t) = \sum_{k=-M}^{M} \varphi(t + 2k\pi)$.
3. Justifier que l'on peut écrire, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\phi(t) = \phi(0) + t\psi(t)$ où ψ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
4. En déduire que la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ vers la distribution $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_{2k\pi}$.