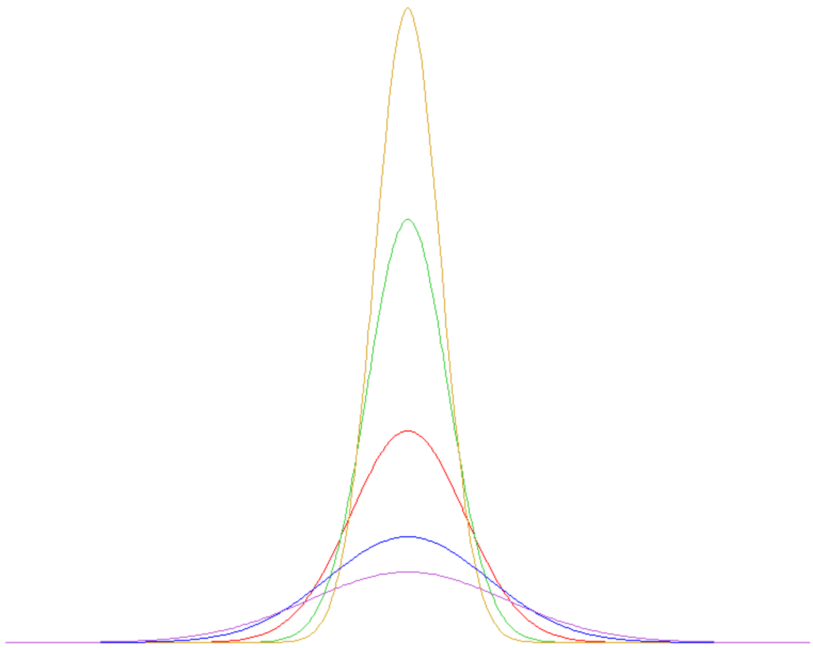
U.P.N - Sup Galilée
Formation Ingénieurs MACS / M1 Mathématiques

Année scolaire 2015-2016

Théorie des distributions

H. Boumaza



Le 20 novembre 2015

Bibliographie

[1] J.M. Bony, *Cours d'analyse, Théorie des distributions et analyse de Fourier*, Les éditions de l'Ecole Polytechnique, Ellipses.

[2] G. Carlier, *Notes de cours : Analyse fonctionnelle*, https ://www.ceremade.dauphine.fr/ carlier/poly2010.pdf

[3] L. Hörmander, *The Analysis of Linear Partial Differential Operators I*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften (256), Springer.

[4] J.P. Marco et autres, *Mathématiques L3, Analyse* , Pearson Education France.

[5] B. Simon et M. Reed, *Methods of modern mathematical physics. II. Fourier analysis, self-adjointness*, Academic Press, New York-London, 1975.

[6] C. Zuily, *Éléments de distributions et d'équations aux dérivées partielles*, Sciences Sup, Dunod.

Table des matières

Première partie

Notions de bases

Chapitre 1

Rappels de théorie de l'intégration

1.1 Mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$

Quelles sont les propriétés fondamentales que partagent la longueur d'une partie de $\mathbb{R}$, l'aire d'une partie de $\mathbb{R}^2$, le volume d'une partie de $\mathbb{R}^3$ et plus généralement le volume d'une partie de $\mathbb{R}^d$? Peut-on donner un sens au volume de toute partie de $\mathbb{R}^d$? On attend d'une notion de longueur, d'aire et de volume d'avoir en commun la positivité et la propriété d'additivité qui est que, si deux parties A et B de $\mathbb{R}^d$ sont disjointes, le volume de leur réunion est égal à la somme de leurs volumes : $\mathrm{vol}(A \cup B) = \mathrm{vol}(A) + \mathrm{vol}(B)$ lorsque $A \cap B = \emptyset$. Une autre propriété attendue du volume est l'invariance par translation. Si $x \in \mathbb{R}^d$ et A est une partie de $\mathbb{R}^d$, $\mathrm{vol}(x + A) = \mathrm{vol}(A)$. Au début du XX^e siècle, Émile Borel introduit une idée clé, celle qu'une notion de volume doit vérifier une propriété plus forte, l'additivité dénombrable, pour pouvoir s'intégrer utilement dans les théories modernes d'analyse. Une « bonne » notion de volume devra donc vérifier que, pour toute famille dénombrable $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ de parties de $\mathbb{R}^d$ deux à deux disjointes,

$$\mathrm{vol}\left(\bigcup_{p\in\mathbb{N}} A_p\right) = \sum_{p\in\mathbb{N}} \mathrm{vol}(A_p).$$

Mais, une telle notion de volume qui associerait à *toute* partie de $\mathbb{R}^d$ un réel positif vérifiant l'additivité dénombrable et l'invariance par translation n'existe pas. C'est Henri Lebesgue qui en 1902 sera le premier à construire un exemple de *mesure* sur $\mathbb{R}$ qui soit dénombrablement additive et invariante par translation. Cette mesure correspond à la notion de volume recherchée. Pour cela, Lebesgue introduit la notion de mesure extérieure qui approche « par au-dessus » la mesure de toute partie de $\mathbb{R}$. Puis il définit les parties de $\mathbb{R}$ qui seront suffisament peu irrégulières pour que l'on puisse leur associer une mesure. Ce sont les parties Lebesgue-mesurables de $\mathbb{R}$.

1.1.1 Ensembles mesurables et mesure de Lebesgue

Nous commencons par définir les pavés de $\mathbb{R}^d$ et leur volume. Un pavé P dans $\mathbb{R}^d$ est un produit cartésien de d intervalles de $\mathbb{R}$ bornés (ouverts, fermés, semi-ouverts ou semi-fermés)

$$P = (a_1, b_1) \times \cdots \times (a_d, b_d),$$

où $a_j \leq b_j$ sont des nombres réels, $j = 1, \ldots, d$. Pour un tel sous-ensemble de $\mathbb{R}^d$, la notion naturelle de volume associée est le produit des longueurs des côtés. On appelle *volume* d'un pavé P le réel positif noté $|P|$ défini par

$$|P| = (b_1 - a_1) \cdots (b_d - a_d).$$

Une union de pavés est dite *quasi disjointe* si les intérieurs des pavés de l'union sont disjoints. Enfin, un *cube* est un pavé pour lequel $b_1 - a_1 = \cdots = b_d - a_d$. L'intérêt de ces cubes et pavés provient du fait qu'ils approchent bien les ouverts de $\mathbb{R}^d$.

Proposition 1.1.1. *Tout ouvert $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R}^d$ peut s'écrire comme union dénombrable de cubes quasi disjoints.*

Pour définir le volume d'une partie plus compliquée qu'un pavé, nous commençons par construire une fonction qui à toute partie de $\mathbb{R}^d$ associe un volume qui généralise le volume des pavés. L'idée est d'approcher « par au-dessus » tout sous-ensemble de $\mathbb{R}^d$ par des cubes. Soit E une partie de $\mathbb{R}^d$. On appelle mesure extérieure de E le réel positif défini par

$$\lambda_d^*(E) = \inf\Big\{ \sum_{j=1}^{\infty} |C_j| \;\Big|\; \forall j \geq 1,\ C_j \text{ est un cube fermé et } E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} C_j \Big\}.$$

Pour les parties simples comme l'ensemble vide, un point ou un cube, la mesure extérieure correspond bien à notre idée intuitive de volume. La mesure extérieure de $\mathbb{R}^d$ est infinie. Toutefois, la mesure extérieure ne vérifie pas l'additivité dénombrable voulue pour définir une bonne notion de volume. Nous avons seulement l'inégalité suivante : si $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$, alors

$$\lambda_d^*(E) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_d^*(E_j).$$

On a tout de même que si $E = E_1 \cup E_2$ avec $d(E_1, E_2) > 0$, alors $\lambda_d^*(E) = \lambda_d^*(E_1) + \lambda_d^*(E_2)$. Malgré ces deux propriétés, on ne peut pas conclure en général que, si $E_1 \cup E_2$ est une union disjointe de sous-ensembles de $\mathbb{R}^d$, $\lambda_d^*(E_1 \cup E_2) = \lambda_d^*(E_1) + \lambda_d^*(E_2)$. Cette égalité n'aura lieu que pour des ensembles qui ne sont pas trop pathologiques, les ensembles mesurables.

Définition 1.1.2. *Un sous-ensemble $E \subset \mathbb{R}^d$ est dit Lebesgue-mesurable, ou plus simplement mesurable, si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un ouvert $\mathcal{O}$ contenant E tel que*

$$\lambda_d^*(\mathcal{O} \setminus E) \leq \varepsilon.$$

On a alors que tout ouvert de $\mathbb{R}^d$ est mesurable, qu'une union dénombrable d'ensembles mesurables est mesurable et que le complémentaire d'un ensemble mesurable est mesurable.

Nous pouvons maintenant définir la notion de mesure pour un ensemble mesurable. Si $E \subset \mathbb{R}^d$ est mesurable, on définit sa mesure de Lebesgue par $\lambda_d(E) = \lambda_d^*(E)$. Alors, la mesure de Lebesgue vérifie bien la propriété d'additivité dénombrable.
Soit $(E_j)_{j\geq 1}$ une famille dénombrable d'ensembles mesurables et disjoints dans $\mathbb{R}^d$. Alors leur réunion $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$ est mesurable et

$$\lambda_d(E) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_d(E_j).$$

On a aussi l'invariance par translation : si E un ensemble mesurable de $\mathbb{R}^d$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, le translaté $x + E = \{x + y \mid y \in E\}$ est mesurable et $\lambda_d(x + E) = \lambda_d(E)$.

On note souvent aussi la mesure de Lebesgue par le symbole $\mathrm{d}x$ au lieu de λ_d.

1.1.2 Espaces mesurés et applications mesurables

On généralise la notion de mesure à un ensemble quelconque en demandant à ce que les principales propriétés de stabilité des ensembles mesurables et de la mesure de Lebesgue soient conservées.

Définition 1.1.3. *Soit X un ensemble. Une tribu sur X est un sous-ensemble $\mathcal{M}$ de $\mathcal{P}(X)$ qui vérifie les conditions suivantes :*

1. $X \in \mathcal{M}$ *;*
2. *si $A \in \mathcal{M}$, son complémentaire A^c est dans $\mathcal{M}$;*
3. *si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{M}$, $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{M}$.*

Les éléments de $\mathcal{M}$ sont appelés ensembles mesurables. Un espace mesurable est un couple $(X, \mathcal{M})$ où X est un ensemble et $\mathcal{M}$ une tribu sur X.

Exemple 1.1.4. ***(Tribu de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$).*** *L'ensemble des parties de $\mathbb{R}^d$ Lebesgue-mesurables forme une tribu sur $\mathbb{R}^d$ que nous noterons $\mathcal{M}_L(\mathbb{R}^d)$.*

Exemple 1.1.5. *On appelle tribu borélienne de $\mathbb{R}^d$ la tribu $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ engendrée par les ouverts de $\mathbb{R}^d$, c'est-à-dire, la plus petite tribu de $\mathbb{R}^d$ contenant tous les ouverts de $\mathbb{R}^d$ (pour la topologie usuelle).*

Une mesure est une fonction définie sur une tribu, à valeurs positives, vérifiant une condition d'additivité dénombrable. Nous axiomatisons donc la propriété de σ-additivité obtenue pour la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$.

Définition 1.1.6. *Soit $(X, \mathcal{M})$ un espace mesurable. Une mesure sur $(X, \mathcal{M})$ est une application de $\mathcal{M}$ dans $[0, +\infty]$, telle que $\mu(\emptyset) = 0$ et, si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de parties mesurables deux à deux disjointes,*

$$\mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n), \ (\sigma-\text{additivité}).$$

Si μ est une mesure sur $(X, \mathcal{M})$, le triplet $(X, \mathcal{M}, \mu)$ est appelé un espace mesuré.

Exemple 1.1.7. *La mesure de Lebesgue est une mesure sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{M}_L(\mathbb{R}^d))$.*

Exemple 1.1.8. *Les mesures à poids, de la forme $\mathrm{d}\mu(x) = h(x)\mathrm{d}x$ avec $h > 0$ et qui vérifient :*

$$\forall f \textit{ mesurable}, \ \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\mathrm{d}\mu(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)h(x)\mathrm{d}x.$$

Exemple 1.1.9. *Les mesures discrètes notées $\mathrm{d}\mu = \sum \alpha_j \delta_{a_j}$ et qui vérifient :*

$$\forall f \textit{ mesurable}, \ \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\mathrm{d}\mu(x) = \sum \alpha_j f(a_i).$$

Définition 1.1.10. *On appelle mesure de Radon positive sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^d$ une mesure positive μ sur la tribu borélienne $\mathcal{B}(\Omega)$ qui est finie sur les compacts :*

$$\forall K \subset \Omega \textit{ compact}, \ \mu(K) < +\infty.$$

On appelle mesure de Radon tout combinaison linéaire $\mu_1 - \mu_2 + \mathrm{i}(\mu_3 - \mu_4)$ où les μ_j sont des mesures de Radon positives.

Les trois exemples précédents sont des mesures de Radon positives.

Concluons par un point de terminologie.

Définition 1.1.11. *Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré et soit P une propriété définie sur X. On dit que P est vraie μ-presque partout si elle est vraie hors d'un ensemble mesurable de mesure nulle. On écrit aussi P vraie μ-pp. On dit encore que P est vraie pour μ-presque tout x dans X.*

On termine par la notion de mesurabilité d'une application entre espaces mesurables qui est analogue à celle de la continuité d'une application entre espaces topologiques et utilise la notion d'image réciproque.

Définition 1.1.12. *Soient $(X, \mathcal{M})$ et $(Y, \mathcal{N})$ deux espaces mesurables. Une application f de X dans Y est dite mesurable lorsque, pour tout ensemble mesurable $N \in \mathcal{N}$, son image réciproque $f^{-1}(N)$ est mesurable, c'est-à-dire que $f^{-1}(N) \subset \mathcal{M}$.*

Exemple 1.1.13. ***(Fonctions caractéristiques).*** *On considère un espace mesurable $(X, \mathcal{M})$ et on munit $\mathbb{R}$ de sa tribu borélienne. Pour une partie A de X,* la fonction caractéristique $\mathbf{1}_A$ est mesurable si et seulement si A est mesurable.

1.2 Intégrale de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$

1.2.1 Construction de l'intégrale de Lebesgue

On commence par définir l'intégrale de Lebesgue d'une fonction positive. On appelle fonction étagée toute combinaison linéaire finie d'indicatrices d'ensembles mesurables :

$$\varphi = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \mathbf{1}_{A_j},\ \alpha_j \in \mathbb{R},\ A_j \subset \mathbb{R}^d \text{ et mesurable.}$$

On appelle *intégrale de φ sur $\mathbb{R}^d$* la quantité, notée $\int_{\mathbb{R}^d} \varphi d\lambda_d$, définie par

$$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi d\lambda_d = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \lambda_d(A_j) \in [0, +\infty].$$

Pour définir l'intégrale d'une fonction mesurable $f : \mathbb{R}^d \to [0, +\infty]$, on utilise un procédé d'approximation : on cherche à écrire f sous la forme $f = \lim_{n \to +\infty} \varphi_n$ avec $\varphi_n : \mathbb{R}^d \to [0, +\infty[$ étagée et mesurable pour tout $n \in \mathbb{N}$ et on pose ensuite $\int_{\mathbb{R}^d} f d\lambda_d = \lim_{n \to +\infty} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_n$.

Proposition 1.2.1. *Soit $f : \mathbb{R}^d \to [0, +\infty]$ une fonction mesurable. Alors il existe une suite $(\varphi_n : \mathbb{R}^d \to [0, +\infty])_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions étagées mesurables telles que*

1. *$0 \leq \varphi_n \leq \varphi_{n+1} \leq f$ pour tout $n \in \mathbb{N}$;*
2. *la suite $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers f.*

De plus, si f est bornée sur $A \subset X$, la suite $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur A.

On peut alors définir l'intégrale d'une fonction mesurable $f : \mathbb{R}^d \to [0, +\infty]$ de la façon suivante. Soit $f : \mathbb{R}^d \to [0, +\infty]$ une fonction mesurable. On appelle *intégrale* de f la quantité, notée $\int_{\mathbb{R}^d} f d\lambda_d$, définie par

$$\int_{\mathbb{R}^d} f d\lambda_d = \sup \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} \varphi d\lambda_d \ : \ \varphi : \mathbb{R}^d \to [0, +\infty[\text{ mesurable étagée et telle que } \varphi \leq f \right\} \in [0, +\infty].$$

Si $A \subset \mathbb{R}^d$ est une partie mesurable, on pose $\int_A f d\lambda_d = \int_{\mathbb{R}^d} f \mathbf{1}_A d\lambda_d$.
Nous pouvons maintenant étendre la définition de l'intégrabilité aux fonctions à valeurs réelles ou complexes (et ensuite à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ ou $\mathbb{C}^d$).

Soit$f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ une application mesurable. Notons f_+ et f_- les applications

$$f_+ = \max(f, 0) \text{ et } f_- = \max(-f, 0).$$

Les applications f_+ et f_- sont mesurables, car f l'est, et sont à valeurs dans $[0, +\infty[$. On a alors les relations

$$f = f_+ - f_- \text{ et } |f| = f_+ + f_-.$$

Définition 1.2.2 (Fonction intégrable à valeurs réelles)**.** *Une fonction $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ est dite intégrable par rapport à la mesure λ_d, ou simplement intégrable, si f est mesurable et si $\int_{\mathbb{R}^d} |f| d\lambda_d < +\infty$. Dans ce cas, on appelle intégrale de f sur $\mathbb{R}^d$ le nombre réel, noté $\int_{\mathbb{R}^d} f d\lambda_d$, défini par*

$$\int_{\mathbb{R}^d} f d\lambda_d = \int_{\mathbb{R}^d} f_+ d\lambda_d - \int_{\mathbb{R}^d} f_- d\lambda_d.$$

On note $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$ l'ensemble des fonctions intégrables à valeurs réelles.

Pour une fonction à valeurs complexes, son intégrale est tout simplement la somme de l'intégrale de sa partie réelle et de i fois l'intégrale de sa partie imaginaire.

1.2.2 Théorème de convergence dominée

Nous présentons le théorème de convergence dominée ou **TCD** en abrégé. Ce théorème affirme que $\int \lim_{n\to+\infty} f_n = \lim_{n\to+\infty} \int f_n$ lorsque $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite simplement convergente de fonctions intégrables dominée par une fonction positive intégrable g au sens suivant : $|f_n| \leq g$ pour tout n. Le fait qu'il suffise d'avoir une convergence simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers f est un grand progrès par rapport aux énoncés qui peuvent être rencontrés dans le cadre de l'intégrale de Riemann. D'une manière générale, le théorème de convergence dominée est, comme nous le verrons, d'une grande utilité pratique.

Théorème 1.2.3 (Théorème de convergence dominée)**.** *Soit $(f_n : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C})_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions intégrables. On suppose que*

(i) il existe une fonction $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ telle que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f presque partout sur $\mathbb{R}^d$;

(ii) il existe une fonction $g : \mathbb{R}^d \to [0, +\infty[$ intégrable telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f_n| \leq g$ presque partout sur $\mathbb{R}^d$.

Alors la fonction f est intégrable sur $\mathbb{R}^d$ et on a

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^d} |f - f_n| = 0 \quad et \quad \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^d} f_n = \int_{\mathbb{R}^d} \lim_{n\to+\infty} f_n = \int_{\mathbb{R}^d} f.$$

Dans la pratique, la fonction f est souvent *définie* presque partout par $f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$ et prolongée arbitrairement à $\mathbb{R}^d$. La fonction $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ est mesurable comme limite simple presque partout d'une suite de fonctions mesurables. Le fait qu'il soit suffisant, dans l'énoncé du TCD, d'avoir une convergence simple presque partout et une domination presque partout est typique des théorèmes d'interversion limite-intégrale dans le cadre de l'intégrale de Lebesgue.

Exemple 1.2.4. *Déterminons la limite lorsque n tend vers l'infini de la suite :*

$$\forall n \geq 1,\ u_n = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t.$$

On a :

$$\forall n \geq 1,\ u_n = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{[0,\sqrt{n}]}(t) \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t$$

et on pose pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f_n(t) = \mathbf{1}_{[0,\sqrt{n}]}(t) \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n$. Alors pour tout $t \in \mathbb{R}$ fixé, $f_n(t)$ tend vers $\mathrm{e}^{-t^2}\mathbf{1}_{[0,+\infty[}(t)$ lorsque n tend vers $+\infty$. De plus, pour tout $n \geq 1$ et tout $t \in \mathbb{R}$, $1 - \frac{t^2}{n} \leq \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{n}}$, d'où

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \forall n \geq 1,\ |f_n(t)| \leq \mathrm{e}^{-t^2}$$

qui est indépendante de n et intégrable sur $\mathbb{R}$. Donc, on peut appliquer le TCD à $(f_n)_{n\geq 1}$ pour obtenir

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} f_n(t)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

1.2.3 Intégrales à paramètre

Le TCD implique les théorèmes suivants sur les intégrales à paramètres.

Théorème 1.2.5 (Continuité sous le signe $\int$)**.** *Soit $a \in \mathbb{R}^p$. On considère une fonction f de $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{C}$ qui vérifie les conditions suivantes :*

1. *Pour tout $x \in \mathbb{R}^p$, l'application partielle $f_x : y \mapsto f(x,y)$ est mesurable.*
2. *Pour presque tout $y \in \mathbb{R}^d$, l'application partielle $x \mapsto f(x,y)$ est continue au point a.*
3. *Il existe une fonction $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$ telle que $|f(x,y)| \leq g(y)$, pour tout $x \in \mathbb{R}^p$ et pour presque tout $y \in \mathbb{R}^d$.*

Alors il est possible de définir une application $F : \mathbb{R}^p \to \mathbb{C}$ par $F(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x,y)\,\mathrm{d}\mu(y)$, et F est continue au point a.

Exemple 1.2.6. ***(Transformée de Fourier).*** *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$, on pose, pour $x \in \mathbb{R}^d$,*

$$\hat{g}(x) = \int_{\mathbb{R}^d} g(y)\, e^{-i(x|y)}\mathrm{d}y,$$

où $(x|y)$ est le produit scalaire euclidien de x et y. Alors $\hat{g}$ est continue sur $\mathbb{R}^p$.

Après la continuité, nous étudions la dérivabilité d'une fonction définie par une intégrale.

Théorème 1.2.7 (Dérivabilité sous le signe $\int$)**.** *Soit $\mathcal{O}$ un ouvert de $\mathbb{R}^p$. On considère une fonction f de $\mathcal{O} \times \mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{C}$ qui vérifie les conditions suivantes :*

1. *Pour tout $x \in \mathcal{O}$, l'application partielle $f_x : y \mapsto f(x,y)$ est intégrable.*
2. *Pour presque tout $y \in \mathbb{R}^d$, l'application partielle $f_y : x \mapsto f(x,y)$ est de classe C^1 dans $\mathcal{O}$.*
3. *Il existe une fonction $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$ telle que*

$$\forall i \in \{1,\ldots,p\},\ \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}(x,y)\right| \leq g(y)$$

pour tout $x \in \mathcal{O}$ et pour presque tout $y \in \mathbb{R}^d$.

Alors, il est possible de définir une fonction $F : \mathcal{O} \to \mathbb{C}$ par $F(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x,y)\,\mathrm{d}\lambda_d(y)$. Cette fonction est de classe C^1 dans $\mathcal{O}$, et ses dérivées partielles sont données par

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x,y)\,\mathrm{d}\lambda_d(y).$$

Joint au théorème de continuité précédent, le théorème de dérivation permet de montrer qu'une fonction est de classe C^1.

Exemple 1.2.8. ***(Transformée de Laplace).*** *Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable. On appelle transformée de Laplace de f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par*

$$F : x \mapsto \int_0^\infty e^{-tx} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

On montre que F est bien définie et continue sur $\mathbb{R}_+$, de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et que sa limite en $+\infty$ est nulle.

Nous sommes souvent amenés à démontrer la continuité ou la dérivabilité d'une fonction F définie par une intégrale sur un intervalle ouvert I. Il arrive alors, comme c'est le cas pour démontrer la dérivabilité de la transformée de Laplace, que l'hypothèse de domination nécessaire à l'application d'un théorème de régularité sous le signe $\int$ ne soit pas vraie sur tout l'intervalle I, mais seulement sur des sous-intervalles de I. Dans ce cas, on utilise le fait que la régularité d'une fonction (sa continuité ou sa dérivabilité) est une notion locale. En effet, si une fonction est régulière au voisinage d'un point, elle l'est aussi en ce point. Si on veut démontrer la régularité de F en tout point de I, on commence par fixer un point $a \in I$. Alors, comme I est ouvert, a possède un voisinage $]\alpha, \beta[$ contenu dans I, voisinage sur lequel on peut tenter de démontrer l'hypothèse de domination voulue. Si cela est possible, les théorèmes de régularité sous le signe $\int$ s'appliquent et on démontre que F est régulière sur $]\alpha, \beta[$. En particulier, F est régulière en a. Le point a étant quelconque dans I, F est régulière sur I.
Pour étudier des limites aux bords de l'intervalle ouvert où les théorèmes de régularité sous le signe $\int$ ne s'appliquent pas, comme la limite en $+\infty$ de la transformée de Laplace, on applique directement le théorème de convergence dominée ou celui de convergence monotone. On utilise pour cela la caractérisation séquentielle des limites.

Exemple 1.2.9. *Etudions la transformée de Laplace de la fonction $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$. Soit $f : (x,t) \mapsto \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}$ définie sur $]0, +\infty[\times[0, +\infty[$. Pour tout $x > 0$, $t \mapsto f(x,t)$ est continue sur $[0, +\infty[$ et intégrable car*

$$|f(x,t)| \leq \frac{1}{1+t^2}.$$

Pour tout $t \geq 0$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$ et

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -t\frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}, \quad et \quad \forall n \geq 1,\ \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,t) = (-1)^n t^n \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}.$$

Alors, pour tout $n \geq 1$, la fonction $\frac{\partial^n f}{\partial x^n}$ est continue en x et intégrable en t et on a, si $a > 0$,

$$\forall x \geq a,\ \forall t \geq 0,\ \left|\frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,t)\right| \leq t^n \mathrm{e}^{-at}$$

qui est indépendante de x et intégrable sur $[0, +\infty[$. Donc, par le théorème de dérivabilité sous le signe intégrale, on en déduit que

$$F : x \mapsto \int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

est de classe C^∞ sur $[a, +\infty[$. Soit $x_0 > 0$. Il existe $a > 0$ tel que $x_0 \in [a, +\infty[$. Comme F est de classe C^∞ sur $[a, +\infty[$, elle l'est en x_0. Cela étant vrai pour tout $x_0 > 0$, F est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$.
On remarque que l'on a de plus $F''(x) + F(x) = \frac{1}{x}$ pour tout $x > 0$ et on a

$$|F(x)| \leq \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}\mathrm{d}t = \frac{1}{x}$$

qui tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.

1.2.4 Les espaces L^p

Soit $p \in \mathbb{R}_+^*$. On note $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d)$ l'ensemble des fonctions f, mesurables de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{C}$, qui vérifient

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f|^p \, \mathrm{d}\lambda_d < +\infty.$$

On appelle espace $L^p(\mathbb{R}^d)$ l'espace des classes de fonctions égales presque partout qui sont dans $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d)$. Plus précisement, on définit la relation d'équivalence $\sim$ sur $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d)$ par :

$$f \sim g \iff f = g \text{ p.p.}$$

et on définit $L^p(\mathbb{R}^d) = \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d)/\sim$. On identifie ensuite la classe d'équivalence de $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d)$ qui est un élément de $L^p(\mathbb{R}^d)$ avec son représentant f.
Pour $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, on pose

$$||f||_p = \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f|^p \mathrm{d}\lambda_d \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Alors $||\cdot||_p$ est une norme sur $L^p(\mathbb{R}^d)$ pour lequel cet espace est complet.

Dans les espaces L^p ($1 \leq p < +\infty$) on a un théorème de convergence dominée en remplaçant "intégrable" par $g \in L^p$ et la convergence a alors lieu dans L^p.

Proposition 1.2.10 (Inégalité de Hölder)**.** *Soient f et g deux fonctions mesurables de $\mathbb{R}^d$ dans $[0, +\infty]$. Alors, pour tout $p \geq 1$, si q est l'exposant conjugué de p,* i.e. *le réel tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$,*

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)g(x)\mathrm{d}x \leq \Big(\int_{\mathbb{R}^d} f^p(x)\mathrm{d}x \Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\int_{\mathbb{R}^d} g^q(x)\mathrm{d}x \Big)^{\frac{1}{q}} \leq +\infty.$$

Si le second membre est fini, l'égalité a lieu si et seulement s'il existe deux réels γ et δ, non tous deux nuls, tels que l'égalité $\gamma f^p(x) = \delta g^q(x)$ ait lieu presque partout.

Corollaire 1.2.11. *Soient p et q deux exposants conjugués. Si $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$, le produit fg est dans $L^1(\mathbb{R}^d)$, et*

$$||fg||_1 \leq ||f||_p \, ||g||_q.$$

1.2.5 Théorème de Fubini

Lorsque l'on calcule l'intégrale d'une fonction $f : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{C}$ de plusieurs variables, le premier outil auquel on doit penser est le théorème de Fubini. Celui s'énonce sous la forme suivante :

Théorème 1.2.12. *Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^{d+p})$. Alors les fonctions suivantes sont définies presques partout*

$$x \mapsto \int_{\mathbb{R}^p} f(x,y)\mathrm{d}y \quad \textit{et} \quad y \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} f(x,y)\mathrm{d}x$$

et sont respectivement dans $L^1(\mathbb{R}^d)$ et $L^1(\mathbb{R}^p)$. De plus, on la relation :

$$\int_{\mathbb{R}^{d+p}} f(x,y)dxdy = \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^p} f(x,y)dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x,y)dx \right) dy.$$

Remarque 1.2.13. *Le théorème reste vrai pour f non forcément intégrable, mais positive (pour une fonction à valeurs réelles).*

1.2.6 Théorème du changement de variable

L'autre outil essentiel permettant de calculer une intégrale est le théorème de changement de variable.

On note pour φ une fonction différentiable sur un ouvert U de $\mathbb{R}^d$ et pour $x \in U$, la Jacobienne de φ en x par $J_\varphi(x)$. C'est la matrice de la différentielle de φ au point x dans la base canonique de $\mathbb{R}^d$.

Théorème 1.2.14. *Soit $\varphi : U \to V = \varphi(U)$ un C^1-difféomorphisme entre deux ouverts de $\mathbb{R}^d$. Alors,*

1. *Pour toute fonction g mesurable et positive, $g : \varphi(U) \to [0, +\infty]$,*
$$\int_{\varphi(U)} g(x)\mathrm{d}x = \int_U g(\varphi(x))|\det(J_\varphi(x))|\mathrm{d}x.$$
2. *De plus, une fonction mesurable $f : \varphi(U) \to \mathbb{C}$ est intégrable sur $\varphi(U)$ si et seulement si $(f \circ \varphi)|\det(J_\varphi(\cdot))|$ est intégrable sur U et on a*
$$\int_{\varphi(U)} f(x)\mathrm{d}x = \int_U f(\varphi(x))|\det(J_\varphi(x))|\mathrm{d}x.$$

Les changements de variable qui interviennent le plus souvent sont les changements en polaire et les changements de variable linéaires.
Pour le changement de variables en polaire on a :

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{]0,2\pi[\times]0,+\infty[} f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta.$$

Cela donne en dimension d :

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x_1,\dots,x_d)\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_d = \int_{S(0,1)\times]0,+\infty[} g(r,\theta_1,\dots,\theta_{d-1})r^{d-1}\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta_1\cdots\mathrm{d}\theta_{d-1}$$

où

$$g(r,\theta_1,\dots,\theta_{d-1}) = f(r\cos(\theta_1), r\sin(\theta_1)\cos(\theta_2),\dots, r\sin(\theta_1)\cdots\sin(\theta_{d-2})\cos(\theta_{d-1}), r\sin(\theta_1)\cdots\sin(\theta_{d-2})\sin(\theta_{d-1})).$$

En effet, le changement en polaire en dimension 2 est donné par le difféomorphisme $\varphi : (r,\theta) \mapsto (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$ dont le Jacobien en tout point est donné par :

$$J_\varphi(r,\theta) = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{vmatrix} = r.$$

Exemple 1.2.15. *Calculons l'intégrale gaussienne : $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$. Pour cela on commence par utiliser Fubini pour justifier que*
$$I^2 = \int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$
Puis on effectue un changement de variables en polaires :

$$I^2 = \int_0^{2\pi}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-r^2} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = 2\pi\left[-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-r^2}\right]_0^\infty = 2\pi \times \frac{1}{2} = \pi.$$

Donc : $I = \sqrt{\pi}$.

Exemple 1.2.16. *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors,*

1. $\int_{B(0,1)} \frac{1}{\|x\|^\alpha} \mathrm{d}x$ *est convergente si et seulement si* $\alpha < d$.
2. $\int_{\mathbb{R}^d \setminus B(0,1)} \frac{1}{\|x\|^\alpha} \mathrm{d}x$ *est convergente si et seulement si* $\alpha > d$.

En effet, il suffit d'effectuer un changement de variables en polaires pour se ramener au cas du critère de Riemann en dimension 1. *On a alors, avec* $dx = r^{d-1}\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$,

$$\int_{B(0,1)} \frac{1}{\|x\|^\alpha} \mathrm{d}x = \int_{S(0,1)} \int_0^1 \frac{1}{r^\alpha} r^{d-1} \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta.$$

La convergence de cette intégrale revient donc à celle de $\int_0^1 \frac{1}{r^{\alpha+1-d}} \mathrm{d}r$ *et par le critère de Riemann, elle converge si et seulement si* $\alpha + 1 - d < 1$ *donc* $\alpha < d$. *Idem pour l'autre cas.*

Lorsque l'on utilise Fubini ou le changement de variable on procède en général en deux temps : on applique la version pour les fonctions positives à $|f|$ pour justifier de l'intégrabilité puis on utilise à nouveau le théorème pour faire le calcul effectif de l'intégrale. Rappelons aussi que ces théorèmes, tout comme l'IPP ne permettent pas de calculer directement une intégrale en général (sauf cas particuliers) mais permettent juste de se ramener à un calcul de primitive usuelle.

Pour l'ensemble des démonstrations et plus de précisions sur la théorie de l'intégrale de Lebesgue, nous renvoyons à [4].

Chapitre 2

Introduction à la théorie des distributions

2.1 Autour du Dirac

2.1.1 De la "définition" du Dirac

Il est parfois utile, dans la résolution de certains problèmes de la Physique, de considérer des objets, appelés couramment par abus de langage "fonctions", mais mal définies comme représentations ponctuelles. L'exemple le plus célèbre en est la mesure de Dirac, qui, si elle est considérée comme une fonction, est "nulle en dehors de 0, infinie en 0".
Il est clair que la définition de la mesure de Dirac par la phrase de Dirac n'est pas complète. En effet, on considère les deux fonctions, qui sont elles bien définies sur $\mathbb{R}$ pour tout $\varepsilon > 0$: la fonction ϕ_1^ε telle que $\phi_1^\varepsilon(x) = 0$ pour $|x| \geq \varepsilon$, et $\phi_1^\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^2}(\varepsilon - |x|)$ pour $|x| \leq \varepsilon$, et la fonction $\phi_2^\varepsilon = 2\phi_1^\varepsilon$. Elles vérifient toutes les deux, à la limite, la relation "nulle en dehors de 0, infinie en 0". En revanche, il faut donner un autre critère pour les différencier.
Le premier critère auquel on pense est intégral : on calcule $\int_{\mathbb{R}} \phi_1^\varepsilon(x)dx = 1$ et $\int_{\mathbb{R}} \phi_2^\varepsilon(x)dx = 2$. Ceci permet de les différencier.
Ce critère n'est pas suffisant : en effet considérons $\phi_3^\varepsilon(x)$ la fonction définie par

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_3^\varepsilon(x) = \phi_1^\varepsilon(x), |x| \leq \varepsilon \\ \phi_3^\varepsilon(x) = -\phi_1^\varepsilon(x - 2\varepsilon), |x - 2\varepsilon| \leq \varepsilon \end{array} \right.$$

On constate que $\int_{\mathbb{R}} \phi_3^\varepsilon(x)dx = 0$. On ne peut donc pas différencier ϕ_3^ε de $2\phi_3^\varepsilon$.

Il est donc nécessaire d'évaluer plus de quantités que la simple intégrale. En effet on considère un dernier exemple, $\phi_4 : x \mapsto \phi_1(x - \varepsilon)$. Cette fonction est nulle en 0, et elle tend en tout point x différent de 0 vers 0, car pour tout $x > 0$ il existe ε tel que $x > 2\varepsilon$, donc $\phi_4(x) = 0$, et pour $x < 0$, $\phi_4(x) = 0$. Cette fonction ϕ_4 tend donc simplement vers 0, mais son intégrale totale est 1. On voit ici qu'on ne peut pas identifier le point de singularité pour cette fonction en considérant uniquement sa limite et son intégrale.

2.1.2 Mesure de Dirac en 0

Nous proposons dans un premier temps l'analyse de la distribution ϕ_1^ε en intégrant la distribution sur $[a, b]$, où a et b sont deux réels distincts, indépendants de ε. On trouve que, pour chaque ligne du système ci-dessous, il existe $\varepsilon(a, b)$ tel que, pour $\varepsilon < \varepsilon(a, b)$, on ait l'égalité indiquée. Par exemple, dans le premier cas, $\varepsilon(a,b) = |b|$, dans le deuxième cas $\varepsilon(a,b) = a$.

$$\begin{cases} a < b < 0, \int_a^b \phi_1^\varepsilon(x)dx = 0 \\ 0 < a < b, \int_a^b \phi_1^\varepsilon(x)dx = 0 \\ a < 0 < b, \int_a^b \phi_1^\varepsilon(x)dx = 1 \\ a = 0, \int_a^b \phi_1^\varepsilon(x)dx = \frac{1}{2} \\ b = 0, \int_a^b \phi_1^\varepsilon(x)dx = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

On en déduit que, si $I_1(a,b)$ est la limite lorsque ε tend vers 0 de $\int_a^b \phi_1^\varepsilon(x)dx$, on trouve que

$$\text{Si } 0 \in]a,b[,\ I_1(a,b) = 1, \quad \text{si } 0 \notin [a,b], I_1(a,b) = 0 \quad \text{et } I_1(0,b) = I_1(a,0) = \frac{1}{2}.$$

Aux cas particuliers de $ab = 0$ près, la limite $I(a,b)$ indique l'appartenance de 0 à $[a,b]$. C'est pour cela que l'on appelle souvent la limite de ϕ_1^ε la mesure de Dirac de 0.

2.1.3 Notion d'intégrale d'action

Nous allons maintenant évaluer une infinité de quantités pour essayer de mieux appréhender la masse de Dirac. Définissons

$$\forall i \in \{1,2,3\},\ I_i^\varepsilon(\phi) = \int_{\mathbb{R}} \phi_i^\varepsilon(x)\phi(x)dx$$

où ϕ est une fonction au moins continue sur $\mathbb{R}$ et bornée.
Un simple changement de variable $x = \varepsilon t$ sur $[-\varepsilon, \varepsilon]$, $x - 1 = \varepsilon t$ sur $[1-\varepsilon, 1+\varepsilon]$, $x = 2\varepsilon + \varepsilon t$ sur $[\varepsilon, 3\varepsilon]$ conduit aux égalités

$$\begin{cases} I_1^\varepsilon(\phi) = \int_{-1}^1 \phi(\varepsilon t)(1-|t|)dt \\ I_2^\varepsilon(\phi) = 2I_1^\varepsilon(\phi) \\ I_3^\varepsilon(\phi) = \int_{-1}^1 [\phi(\varepsilon t) - \phi(2\varepsilon + \varepsilon t)](1-|t|)dt \end{cases}.$$

La fonction $t \to \phi(\varepsilon t)$ est bornée, pour $\varepsilon < 1$, par le maximum de ϕ sur $[-1,1]$, qui existe puisque ϕ est continue sur le compact $[-1,1]$. Ainsi on peut appliquer le théorème de la convergence dominée dans les trois intégrales, car la fonction $1-|t|$ est intégrable sur $[-1,1]$, d'intégrale 1.
La limite de $\phi(\varepsilon t)$, pour chaque t, est $\phi(0)$. La limite de $\phi(2\varepsilon + \varepsilon t)$, pour tout t, est $\phi(0)$. Ainsi on trouve

$$\lim_{\varepsilon\to 0} I_1^\varepsilon = \phi(0), \quad \lim_{\varepsilon\to 0} I_2^\varepsilon = 2\phi(0), \quad \lim_{\varepsilon\to 0} I_3^\varepsilon = 0.$$

Là, on peut différencier les limites de ϕ_1^ε ϕ_2^ε et ϕ_3^ε. De plus, les intégrales écrites ci-dessus vérifient les inégalités, pour $\varepsilon < 1$,

$$\begin{array}{rrcl} & I_1^\varepsilon(\phi) & \leq & \max_{x\in[-1,1]} |\phi(x)|, \\ & I_2^\varepsilon(\phi) & \leq & 2 \max_{x\in[-1,1]} |\phi(x)| \\ \text{et} & I_3^\varepsilon(\phi) & \leq & 2 \max_{x\in[-1,1]} |\phi(x)|. \end{array}$$

On a ainsi, pour tout $i \in \{1,2,3\}$:

$$I_i^\varepsilon(\phi) \leq C \max_{x\in\mathbb{R}} |\phi(x)|, \quad C > 0.$$

Lorsqu'on rencontre ce phénomène en Physique, on dit que $\lim \phi_1^\varepsilon$ et $\lim \phi_2^\varepsilon$ sont deux mesures de Dirac, et "chargent" le point 0 par la valeur 1 ou par la valeur 2.

2.2 Notion de dérivée

Un des objectifs du cours est de pouvoir trouver une classe d'objets, appelés distributions, dans laquelle on puisse dériver des fonctions qui ne sont pas dérivables au sens classique. Etudions le cas de la fonction de Heaviside, notée ici H, égale à 1 pour $x > 0$ et à 0 pour $x < 0$, égale à $\frac{1}{2}$ en $x = 0$, est dérivable. Quel serait le candidat pour cette dérivée ? On voit que, pour $x_0 \neq 0$, le taux d'accroissement est nul dès que $h < |x_0|$, et pour $x_0 = 0$, ce taux d'accroissement est $\frac{1}{2|h|}$. Il tend ainsi vers $+\infty$ quand h tend vers 0, donc un candidat souhaitable pourrait être la distribution de Dirac.
Les opérations classiques sur cette classe d'objets doivent être encore valables, donc on veut pouvoir calculer les dérivées de la fonction de Heaviside en calculant la dérivée de fonctions qui l'approchent. Un exemple de suite de fonctions approchant H est donné par

$$H_\epsilon(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < -\epsilon \\ 1 - \frac{(\epsilon - x)^2}{2\epsilon^2} & \text{si} \quad 0 \leq x \leq \epsilon \\ \frac{(\epsilon + x)^2}{2\epsilon^2} & \text{si} \quad -\epsilon \leq x \leq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x > \epsilon \end{cases}$$

Cette fonction admet pour dérivée ϕ_1^ε. Elle est donc de classe C^1 et de plus, H_ϵ tend vers H au sens L^1 car on trouve que $\int |H_\epsilon - H| dx = \frac{\epsilon}{2}$.
On a une convergence simple vers H, mais la convergence au sens de la norme du sup n'est pas assurée. En effet, on a

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |H_\epsilon(x) - H(x)| = \frac{1}{2}.$$

D'après l'analyse faite précédemment sur la famille $(\phi_1^\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ on constate que, pour tout ϕ continue et bornée sur $\mathbb{R}$, on a

$$\int_{\mathbb{R}} (H_\varepsilon)'(x)\phi(x)dx = \int_{\mathbb{R}} \phi_1^\varepsilon(x)\phi(x)dx \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \phi(0).$$

On peut donc considérer que la dérivée de H est l'impulsion de Dirac en 0. Cela sera formalisé au chapitre 5.

On peut à présent effectuer la même analyse que celles faite sur les fonctions ϕ_1^ε sur les fonctions dérivées de ϕ_1^ε. Nous essayons donc de construire une dérivée de l'impulsion de Dirac en 0. Considérons la fonction $(\phi_1^\varepsilon)'$. C'est une fonction constante par morceaux, valant ε^{-2} pour $-\varepsilon < x < 0$, et $-\varepsilon^{-2}$ lorsque $0 < x < \varepsilon$. On constate que le critère intégral fonctionne et ne fonctionne pas à la fois : en effet l'intégrale L^1 de la fonction est égale à $\frac{2}{\varepsilon}$, qui n'a pas de limite, en revanche l'intégrale est nulle. L'analyse de cette distribution est très imprécise. Le critère précédent conduit au calcul de $\int_{\mathbb{R}} (\phi_1^\varepsilon)'(x)\phi(x)dx$ pour ϕ continue et bornée sur $\mathbb{R}$. On trouve

$$\int_{\mathbb{R}} (\phi_1^\varepsilon)'(x)\phi(x)dx = \int_{-\varepsilon}^0 \frac{\phi(x)}{\varepsilon^2}dx - \int_0^\varepsilon \frac{\phi(x)}{\varepsilon^2}dx = -\int_0^1 \frac{\phi(\varepsilon t) - \phi(-\varepsilon t)}{\varepsilon}dt \quad \text{avec } x = \varepsilon t.$$

Sans hypothèse supplémentaire sur ϕ, on ne peut pas aller plus loin dans l'étude de la limite lorsque ε tend vers 0. On suppose que ϕ est dérivable en 0, plus précisément de classe C^1. Alors, une formule de Taylor avec reste intégral donne $\phi(\pm\varepsilon t) = \phi(0) \pm \varepsilon t \int_0^1 \phi'(\pm\varepsilon\theta t)d\theta$, ce qui donne

$$\int_{-\varepsilon}^0 \frac{\phi(x)}{\varepsilon^2}dx - \int_0^\varepsilon \frac{\phi(x)}{\varepsilon^2}dx = -\int_0^1 t \left[\int_0^1 \phi'(\varepsilon\theta t)d\theta + \int_0^1 \phi'(-\varepsilon\theta t)\mathrm{d}\theta\right] \mathrm{d}t.$$

Une application de la convergence dominée prouve que cette intégrale converge vers

$$-\int_0^1 2t\phi'(0)\mathrm{d}t = -\phi'(0).$$

On voit ainsi que l'on a dû supposer ϕ' de classe C^0 et ϕ de classe C^1 pour obtenir une limite finie.
Notons que l'on peut construire un exemple où la suite d'intégrales ne converge pas si ϕ est par exemple seulement continue. On introduit la fonction ϕ_5 définie par $\phi_5(x) = \frac{1}{\varepsilon^3}(\varepsilon^2 - x^2)$ sur $|x| \leq \varepsilon$ et 0 ailleurs. On constate que

$$\int_{\mathbb{R}} \phi_5(x)\phi(x)dx = \int_{-1}^1 \phi(\varepsilon t)(1-t^2)dt \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \frac{4}{3}\phi(0).$$

D'autre part, la dérivée de cette fonction est la fonction ϕ_6 définie par $\phi_6(x) = -\frac{2x}{\varepsilon^3}$ sur $[-\varepsilon, \varepsilon]$ et 0 ailleurs. On a alors

$$\int_{\mathbb{R}} \phi_6(x)\phi(x)dx = -\frac{2}{\varepsilon}\int_{-1}^1 \phi(\varepsilon t)tdt.$$

Ainsi, lorsque l'on choisit $\phi : x \mapsto \frac{x}{|x|}(|x|)^{\frac{1}{2}}$, cette intégrale vaut

$$-\frac{2}{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}\int_{-1}^1 |t|(|t|)^{\frac{1}{2}}dt = -4\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\int_0^1 t^{\frac{3}{2}}dt = -\frac{8}{3}\varepsilon^{-\frac{1}{2}}.$$

L'intégrale peut donc diverger si ϕ est supposée seulement de classe C^0.
Mais, si on suppose ϕ de classe C^1 on peut utiliser à nouveau la formule de Taylor avec reste intégral, $\phi(x) = \phi(0) + x\int_0^1 \phi'(xt)dt$. Alors, de $\int_{-1}^1 t\phi(0)dt = 0$ par imparité, on déduit

$$\int_{\mathbb{R}} \phi_6(x)\phi(x)\mathrm{d}x = -2\int_{-1}^1 \left(\int_0^1 \phi'(\varepsilon tu)du\right) t^2 dt \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} -\frac{4}{3}\phi'(0).$$

Rapprochant ce résultat de $\int \phi_5(x)\phi(x)dx \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \frac{4}{3}\phi(0)$, on voit apparaitre une formule de dérivation qui ressemble à une formule d'intégrations par parties avec en particulier la présence du signe $-$.
Dans cette partie, on a donc obtenu un critère suffisant pour obtenir une grande classe de distributions comme limite de fonctions : il suffit de prendre ϕ de classe C^∞ de façons à pouvoir "dériver" des fonctions non dérivables.

2.3 Le peigne de Dirac

On veut construire un réseau périodique infini de charges ponctuelles placées en tout point entier relatif. C'est un objet naturel dans l'étude du transport électronique dans des réseaux cristallins. La fonction associée simple est alors

$$\Psi^\varepsilon : x \mapsto \sum_{n\in\mathbb{Z}} \phi_1^\varepsilon(x-n).$$

Cette fonction, bien qu'elle soit dans $L^1_{loc}(\mathbb{R})$, puisque intégrable sur tout compact, n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}$. On peut en effet vérifier que l'intégrale sur tout compact est équivalente à la taille du compact lorsque celle-ci tend vers $+\infty$.
On vérifie aussi que, pour une fonction continue et bornée ϕ donnée,

$$\forall m, n \in \mathbb{Z}, \int_{m-\varepsilon}^{n+\varepsilon} \Psi^{\varepsilon}(x)\phi(x)dx = \sum_{p=m}^{p=n} \int_{-1}^{1} (1-|t|)\phi(p+\varepsilon t)dt.$$

Par le TCD,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{m-\varepsilon}^{n+\varepsilon} \Psi^{\varepsilon}(x)\phi(x)dx = \sum_{p=m}^{p=n} \phi(p).$$

Lorsque m tend vers $-\infty$ et n tend vers $+\infty$, cette limite existe lorsque $\sum|\phi(p)| < \infty$. La fonction $\phi: \ x \mapsto \frac{1}{1+|x|}$ ne vérifie pas ce critère alors que $\phi: \ x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ le vérifie.
Pour donner un sens à la somme infinie définissant le peigne de Dirac, la fonction ϕ que l'on choisit comme fonction test doit être "suffisamment décroissante à l'infini". Ce critère est automatiquement vérifié si la fonction ϕ est à support compact. Nous introduisons ainsi les fonctions test, selon la terminologie inspirée de la mécanique classique, qui sont les fonctions de classe C^{∞} à support compact.

2.4 Le Dirac en électrostatique

Nous expliquons à présent la terminologie que nous avons introduite lorsque nous avons parlé de notion de mesure "chargeant" 0. L'équation de l'électrostatique est

$$\Delta V + \frac{\rho_v}{\varepsilon_0} = 0,$$

associée au potentiel

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}, \quad r = (x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}.$$

On dit que ρ_v est la distribution de charges associée à la charge q, calculée de manière intégrale. Calculons ΔV hors de $(x,y,z) = (0,0,0)$. On trouve

$$\begin{array}{rrcl} & \frac{\partial}{\partial x}(\frac{1}{r}) & = & \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}} = -\frac{1}{2}\frac{2x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{x}{r^3} \\ \text{et} & \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\frac{1}{r}) & = & -\frac{1}{r^3} + 3\frac{x}{r^4}\frac{x}{r} = \frac{3x^2}{r^5} - \frac{1}{r^3}. \end{array} \tag{2.1}$$

On obtient les mêmes formules en dérivant par rapport à y puis z et en sommant, hors du point $(0,0,0)$, $\Delta(\frac{1}{r}) = 0$. La "fonction" $\Delta(\frac{1}{r})$ est un bon candidat pour être une distribution de Dirac. On vérifie, pour s de classe C^{∞} à support compact et **radiale**, que, par intégrations par parties et utilisant l'expression du Laplacien en coordonnées sphériques, $\Delta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial}{\partial r})$,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3, r \geq \varepsilon} \Delta(\tfrac{1}{r})s(r)dxdydz &= \int_{\varepsilon}^{\infty} \tfrac{1}{r}(\Delta s)4\pi r^2 dr \\ &= 4\pi \int_{\varepsilon}^{\infty} [r\tfrac{d^2 s}{dr^2} + 2\tfrac{ds}{dr}]dr \\ &= 4\pi \int_{\varepsilon}^{\infty} [\tfrac{d}{dr}(r\tfrac{ds}{dr}) + \tfrac{ds}{dr}]dr \\ &= -4\pi\varepsilon\tfrac{ds}{dr}(\varepsilon) - 4\pi s(\varepsilon). \end{aligned}$$

Remarquons que la première égalité doit être considérée comme une définition. On vérifie que cette intégrale converge, lorsque $\varepsilon \to 0$, vers $-4\pi s(0)$. La distribution associée est alors la distribution $-4\pi\delta_0$, par analogie avec la "distribution" notée δ_0 sur $\mathbb{R}$ qui fait correspondre à ϕ la valeur $\phi(0)$ et que nous avons déjà rencontré plus haut.

Ainsi on écrira plus loin

$$\Delta(\frac{1}{r}) = -4\pi\delta_0.$$

Lorsque $V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}$, on trouve $\Delta V = -\frac{q\delta_0}{\varepsilon_0}$.

A la charge q placée en $r = 0$ est associée la distribution de charge $q\delta_0$ selon la terminologie physique. Ceci explique que l'on dise que la distribution δ_0 "charge" le point 0 avec une charge 1.

Chapitre 3

Fonctions test

Dans tout ce chapitre, Ω désigne un ouvert de $\mathbb{R}^d$, k est un entier naturel ou le symbole ∞ (sauf précision). On désigne par $C^0(\Omega)$ l'espace des fonctions continues sur Ω et par $C^k(\Omega)$ l'espace des fonctions k fois dérivables et dont les dérivées k-ièmes sont continues sur Ω.

3.1 Notations multi-indicielles

Un multi-indice α est un d-uplet d'entiers, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$. On appelle longueur de α l'entier

$$|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_d.$$

On définit la factorielle de α par $\alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_d!$. Si $x \in \mathbb{R}^d$ on pose aussi $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_d^{\alpha_d}$.
Si α et β sont deux multi-indices, on dit que $\alpha \leq \beta$ lorsque $\alpha_i \leq \beta_i$ pour tout $i \in \{1, \ldots d\}$. On pose aussi

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}.$$

Enfin, on pose :

$$\partial^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_d}\right)^{\alpha_d}.$$

Alors, une fonction $\varphi \in C^k(\Omega)$ si pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$ tel que $|\alpha| \leq k$, la fonction $\partial^\alpha \varphi$ est dans $C^0(\Omega)$.

Une formule importante est celle de Leibniz. Soient $k \geq 1$, $\varphi, \psi \in C^k(\Omega)$. Alors, pour tout multi-indice α de longueur inférieure ou égale à k,

$$\partial^\alpha(\varphi \cdot \psi) = \sum_{\beta \leq \alpha} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \partial^\beta \varphi \cdot \partial^{\alpha-\beta} \psi.$$

Pour s'en souvenir, pensez à la formule du binôme de Newton.

3.2 Formule de Taylor avec reste intégral

Voici une formule qui nous sera souvent utile dans la suite. Il faut la connaître au moins à l'ordre 1 ou 2 et à tout ordre pour $d = 1$.

Proposition 3.2.1. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$, $n \geq 1$ un entier et φ une fonction de classe C^n sur Ω. Soient x et y deux points de Ω tels que le segment $[x, y]$ soit contenu dans Ω. Alors :*

$$\varphi(x) = \sum_{|\alpha| \leq n-1} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha \varphi(y)(x-y)^\alpha + \sum_{|\alpha|=n} \frac{n}{\alpha!}(x-y)^\alpha \int_0^1 (1-t)^{n-1} \partial^\alpha \varphi(tx + (1-t)y) \mathrm{d}t.$$

Dans le cas de la dimension 1 on obtient la formule suivante :

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!}(x-y)^k \varphi^{(k)}(y) + (x-y)^n \int_0^1 \frac{(1-t)^{n-1}}{(n-1)!} \varphi^{(n)}(tx + (1-t)y) \mathrm{d}t.$$

En dimension $d \geq 1$ et à l'ordre $n = 1$ on obtient

$$\varphi(x) = \varphi(0) + \sum_{i=1}^{d} (x_i - y_i) \int_0^1 (1-t) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(tx + (1-t)y) \mathrm{d}t.$$

Ce sont ces deux dernières formules que l'on utilisera le plus souvent dans la suite.

3.3 Fonctions de classe C^∞ à support compact

3.3.1 Support d'une fonction continue

Définition 3.3.1. *Le support d'une fonction $\varphi \in C^0(\Omega)$ est le sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}^d$ noté* supp φ *et défini par l'une des assertions équivalentes suivantes :*

1. supp $\varphi = \overline{\{x \in \Omega \mid \varphi(x) \neq 0\}}$.
2. $(\text{supp } \varphi)^c$ *est le plus grand ouvert où la fonction φ est nulle.*
3. $x_0 \notin \text{supp } \varphi$ *si et seulement s'il existe un voisinage V_{x_0} de x_0 tel que :* $\forall x \in V_{x_0}, \ \varphi(x) = 0$.

On a alors :

1. $(\text{supp } \varphi = \emptyset) \ \Leftrightarrow \ (\varphi \equiv 0 \text{ dans } \Omega)$,
2. supp $(\varphi \cdot \psi) \subset \text{supp } \varphi \cap \text{supp } \psi$,
3. si $\varphi \in C^k(\Omega)$, alors, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$ tel que $|\alpha| \leq k$, supp $\partial^\alpha \varphi \subset \text{supp } \varphi$.

3.3.2 Espace des fonctions test

Définition 3.3.2. *L'espace des fonctions test, noté $C_0^\infty(\Omega)$, est l'ensemble des fonctions φ de classe C^∞ telles qu'il existe un compact $K \subset \Omega$, $K =$ supp φ.*

On notera $C_K^\infty(\Omega) = \{\varphi \in C_0^\infty(\Omega), \text{supp } \varphi \subset K\}$ pour $K \subset \Omega$ un compact fixé.

Cet espace n'est pas réduit à la fonction nulle. En effet, nous pouvons construire l'exemple suivant qui est en quelque sorte l'exemple canonique à partir duquel nous pourrons construire les exemples utiles à notre propos. Dans cet exemple, $|\cdot|$ désigne une norme quelconque sur l'espace $\mathbb{R}^d$, disons la norme euclidienne pour fixer les choses.

La fonction à support compact canonique ϕ_0. On définit la fonction ϕ_0 par

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \ \phi_0(x) = \begin{cases} \exp(-\frac{|x|^2}{1-|x|^2}) & \text{si} \quad |x| \leq 1, \\ 0 & \text{si} \quad |x| \geq 1. \end{cases}$$

Cette fonction est dans $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, elle est positive et on a supp $\phi_0 \subset \{x \in \mathbb{R}^d \mid |x| \leq 1\}$. De plus, $\int_{\mathbb{R}^d} \phi_0(x) \mathrm{d}x > 0$.

Démonstration : Pour $d = 1$ on a une démonstration explicite. Pour tout n, il existe un polynôme P_n tel que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \phi_0^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1-x^2)^{2n}}\phi_0(x).$$

En effet, $P_1 = -2X$ et $P_{n+1} = -2XP_n + P_n'(1-X^2)^2 + 4nX(1-X^2)P_n$. On vérifie ainsi que

$$\forall t \in [-1,1],\ \forall n \geq 1,\ \phi_0^{(n)}(1-t) = e\frac{P_n(1-t)}{(2+t)^2 n}\frac{1}{t^{2n}}e^{-\frac{1}{t(2+t)}}$$

et ces dérivées successives sont nulles hors de $[-1,1]$. Pour tout n, la limite de $\phi_0^{(n)}(1-t)$ lorsque t tend vers 0_+ est 0 car l'exponentielle est dominante en $+\infty$. Ainsi, on vérifie que ϕ_0' est continue par morceaux, ϕ_0' admet une limite à droite et une limite à gauche, qui sont égales à 0, aussi bien en $x = 1$ qu'en $x = -1$, donc ϕ_0 est dérivable et ϕ_0' est continue. On démontre ainsi, pour chaque n, que $\phi_0^{(n)}$ est continue. Donc ϕ_0 est indéfiniment dérivable. On peut justifier du caractère C^∞ en dimension d en utilisant le résultat en dimension 1 et en utilisant la composition des fonctions.

□

3.3.3 Topologie de $C_0^\infty(\Omega)$

Pour définir la topologie de l'espace $C_0^\infty(\Omega)$ nous allons définir la notion de convergence des suites d'éléments de cet espace.

Définition 3.3.3. *Une suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $C_0^\infty(\Omega)$ tend vers φ dans $C_0^\infty(\Omega)$ lorsque :*

1. *il existe un compact fixe $K \subset \Omega$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\operatorname{supp} \varphi_n \subset K$,*
2. *la suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et toutes les suites $(\partial^\alpha \varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent uniformément respectivement vers φ et $\partial^\alpha\varphi$ sur K.*

Exemple 3.3.4. *Soit $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Posons, pour $n \in \mathbb{N}$,*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi_n(x) = \phi\left(x + \frac{1}{n+1}\right) - \phi(x).$$

Alors $\varphi_n \to 0$ dans $C_0^\infty(\mathbb{R})$. En effet, si $\operatorname{supp} \phi \subset [-M, M]$, alors pour tout n, $\operatorname{supp} \varphi_n \subset [-M-1, M+1]$. Puis, par le théorème des accroissements finis, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\left|\phi^{(k)}\left(x + \frac{1}{n+1}\right) - \phi^{(k)}(x)\right| \leq \frac{1}{n+1}||\phi^{(k+1)}||_\infty \to 0$$

lorsque n tend vers l'infini.

Pour K un compact fixé de Ω, l'espace $C_K^\infty(\Omega)$ est métrisable à l'aide d'une famille dénombrable de semi-normes. Commençons par montrer que l'ouvert Ω peut s'écrire comme une réunion croissante dénombrable de compacts.

Lemme 3.3.5. *Il existe une famille $(K_i)_{i\geq 1}$ de compacts de Ω telle que*

1. *pour tout $i \geq 1$, $K_i \subset \overset{\circ}{K}_{i+1}$,*
2. *$\Omega = \bigcup_{i=1}^{+\infty} K_i = \bigcup_{i=2}^{+\infty} \overset{\circ}{K}_i$,*
3. *pour tout compact K de Ω, il existe $i_0 \geq 1$ tel que $K \subset K_{i_0}$.*

Démonstration : (Heuristique.) En effet, pour $|\cdot|$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^d$, on pose :

$$K_i = \{x \in \mathbb{R}^d \ : \ |x| \leq i\} \cap \{x \in \Omega \ : \ d(x, \Omega^c) \geq \frac{1}{i}\}.$$

Pour les détails, voir [6, Lemme 1.1, p2].

□

A partir de ces compacts $(K_i)_{i\geq 1}$, on peut définir, pour $i \geq 1$,

$$\begin{cases} p_{K_i}(\varphi) = \sum_{|\alpha|\leq k} \sup_{x\in K_i} |\partial^\alpha \varphi(x)|, & \text{si} \quad \varphi \in C^k(\Omega),\ k \in \mathbb{N}, \\ p_{K_i}(\varphi) = \sum_{|\alpha|\leq i} \sup_{x\in K_i} |\partial^\alpha \varphi(x)|, & \text{si} \quad \varphi \in C^\infty(\Omega). \end{cases}$$

Chaque p_{K_i} est une semi-norme sur $C^k(\Omega)$, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Elles induisent par restriction des semi-normes sur $C_0^k(\Omega)$ et $C_0^\infty(\Omega)$. On peut alors définir sur chacun de ces espaces la distance suivante :

$$d(\varphi, \psi) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{2^i} \frac{p_{K_i}(\varphi - \psi)}{1 + p_{K_i}(\varphi - \psi)}.$$

Les espaces $(C^k(\Omega), d)$ sont complets. De plus, si $K \subset \Omega$ est un compact, $(C_K^\infty(\Omega), d)$ est complet comme sous-espace fermé de $(C^\infty(\Omega), d)$. Toutefois $(C_0^\infty(\Omega), d)$ ne l'est pas (voir exemple 3.3.8). La distance d caractérise la convergence dans $(C_K^\infty(\Omega), d)$, mais pas dans $(C_0^\infty(\Omega), d)$. En effet, il peut y avoir des problèmes aux bords pour les supports. La distance d ne “contient” pas le point (i) de la définition de la convergence dans $C_0^\infty(\Omega)$.

Comme on peut écrire que $C_0^\infty(\Omega) = \bigcup_{i\geq 1} C_{K_i}^\infty(\Omega)$, la topologie que l'on a définie sur $C_0^\infty(\Omega)$ n'est autre que la limite inductive stricte des topologies définies par la distance ci-dessus sur chaque $C_{K_i}^\infty(\Omega)$. Toutefois, $C_0^\infty(\Omega)$ n'est pas métrisable, seul chacun des $C_{K_i}^\infty(\Omega)$ l'est (voir [2], Proposition 1.5).

3.3.4 Fonctions "pic" et "plateau"

Fonctions “pic”.

Proposition 3.3.6. *Soit $x_0 \in \Omega$ et soit $\varepsilon > 0$ tel que $B(x_0, \varepsilon) \subset \Omega$. Alors, il existe une fonction $\rho \in C_0^\infty(\Omega)$ positive, de support inclus dans $B(x_0, \varepsilon)$ et d'intégrale sur $\mathbb{R}^d$ égale à 1. Une telle fonction ρ est appelée fonction pic sur la boule $B(x_0, \varepsilon)$.*

Démonstration : En effet, considérons la fonctions définie sur Ω par

$$\forall x \in \Omega,\ \rho_0(x) = \frac{\phi_0(x)}{\int_{\mathbb{R}^d} \phi_0(x) \mathrm{d}x}$$

puis posons

$$\forall x \in \Omega,\ \rho(x) = \frac{1}{\varepsilon^d} \rho_0 \left(\frac{x - x_0}{\varepsilon} \right).$$

La fonction ρ ainsi définie convient.

□

En dimension $d = 1$ on peut aussi donner une formule explicite pour une fonction pic sur un intervalle quelconque $[a, b]$ non réduit à un singleton. Une fonction C_0^∞ dont le support est $[a, b]$ est

$$\frac{2}{b-a}\phi_0\left(-1+\frac{2(x-a)}{b-a}\right).$$

En particulier, une fonction dont le support est $[-\varepsilon, \varepsilon]$ est $\frac{1}{\varepsilon}\phi_0(\frac{x}{\varepsilon})$. On note enfin un résultat que l'on a déjà utilisé au chapitre précédent. Pour tout $\varepsilon > 0$ et toute fonction continue et bornée ϕ,

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\varepsilon}\phi_0\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\phi(x)dx = \int_{\mathbb{R}} \phi_0(t)\phi(\varepsilon t)dt$$

d'où la convergence de cette suite, lorsque ε tend vers 0, vers $\phi(0)\int_{-1}^{1}\phi_0(t)dt$. On utilise ici le TCD.

Fonctions "plateau".

On commence par le cas de la dimension $d = 1$. Tout d'abord, il existe une fonction "marche" de classe C^∞ qui passe de la valeur 0 sur $]-\infty, -1]$ à 1 sur $[1, +\infty[$. On peut prendre par exemple

$$\psi_0 : x \mapsto \frac{\int_{-1}^{x}\phi_0(t)dt}{\int_{-1}^{1}\phi_0(t)dt}.$$

Puis, à partir de cette "marche", on construit une fonction C_0^∞, dont le support compact est $[a, b]$, identiquement égale à 1 sur $[c, d]$, $a < c < d < b$ et comprise entre 0 et 1. Une telle fonction peut être définie par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ l_0(x) = \begin{cases} \psi_0(-1+\frac{2(x-a)}{c-a}) & \text{si} \quad x \leq \frac{c+d}{2} \\ \psi_0(-1+\frac{2(b-x)}{b-d}) & \text{si} \quad x \geq \frac{c+d}{2}. \end{cases}$$

En effet, sur $[c, \frac{c+d}{2}]$, la fonction l_0 est identiquement égale à 1, ainsi que sur $[\frac{c+d}{2}, d]$, ce qui implique le caractère C^∞ au point $\frac{c+d}{2}$. Cette fonction est appelée "plateau" sur $[c, d]$ supporté par $[a, b]$.

Le résultat persiste en dimension d quelconque.

Proposition 3.3.7. *Soit K un compact de Ω et $\mathcal{O}$ un ouvert tel que $K \subset \mathcal{O}$ et $\overline{\mathcal{O}} \subset \Omega$. Il existe alors $\chi \in C_0^\infty(\Omega)$ telle que $\chi \equiv 1$ sur K, $\chi \equiv 0$ sur $\mathcal{O}^c$ et $0 \leq \chi \leq 1$.*

Démonstration : (Heuristique.) Soit $\varepsilon > 0$. Soit ρ_ε une fonction pic sur la boule $B(0, \varepsilon)$. Soit $K_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^d\ :\ d(x, K) \leq \varepsilon\}$. Posons :

$$\forall x \in \mathbb{R}^d,\ \theta_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \rho_\varepsilon(x-y)\mathbf{1}_{K_\varepsilon}(y)\mathrm{d}y.$$

Alors θ_ε est une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^d$, telle que $0 \leq \theta_\varepsilon \leq 1$, $\theta_\varepsilon = 1$ sur K et $\theta_\varepsilon = 0$ sur $K_{2\varepsilon}^c$. (pour le caractère C^∞, propriété de convolution). Par ailleurs, il existe $\varepsilon_0 \in]0, 1[$ tel que $K \subset K_{2\varepsilon_0} \subset \mathcal{O}$. Alors la fonction θ_{ε_0} convient. Pour plus de détails, consulter [6, Théorème 2.6, p10].

□

Exemple 3.3.8. *Soit $f : x \mapsto e^{-x^2}$ et soit χ_n une fonction plateau valant 1 sur $[-n, n]$ et 0 hors de $[-2n, 2n]$. Alors, la suite $(\chi_n f)$ est de Cauchy dans $C_0^\infty(\mathbb{R})$, elle converge vers f simplement, mais comme f n'est pas dans $C_0^\infty(\mathbb{R})$, elle ne converge pas dans $C_0^\infty(\mathbb{R})$ vers f. Cela montre au passage que $C_0^\infty(\mathbb{R})$ muni de la distance (ou plutôt de son prolongement) que nous avions définie sur $C_K^\infty(\Omega)$ n'est pas complet.*

3.4 Densité par troncature et régularisation

Dans cette partie, nous allons montrer que l'espace des fonctions test $C_0^\infty(\Omega)$ est dense dans l'espace des fonctions continues ou dans les espaces L^p. Cela permettra ensuite, lorsque l'on voudra démontrer un résultat dans ces espaces, de le démontrer tout d'abord pour des fonctions test puis d'étendre le résultat recherché par un argument de densité (et donc par approximation).

3.4.1 Troncature

Nous allons montrer ici que le fait de se restreindre, dans un espace de fonctions d'une régularité donnée, aux fonctions à support compact, n'est pas une restriction importante, dans le sens où on définit alors un sous-espace dense dans l'espace de départ.

Proposition 3.4.1.

1. *Pour $1 \leq p < +\infty$, l'espace $L_c^p(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) \ : \ u = 0$ hors d'un compact $\}$ est dense dans $L^p(\Omega)$.*
2. *Pour $0 \leq k \leq +\infty$; $C_0^k(\Omega)$ est dense dans $C^k(\Omega)$.*

Démonstration : On commence par décomposer Ω en $\Omega = \bigcup_{i\geq 1} K_i$ avec K_i compact et $K_i \subset \overset{\circ}{K}_{i+1}$.

On considère la fonction plateau φ_i qui vaut 1 sur K_i et 0 dans $(\overset{\circ}{K}_{i+1})^c$.

1. Soit $u \in L^p(\Omega)$. On pose, pour tout $i \geq 1$, $u_i = \varphi_i u$ (troncature). Alors $u_i \in L_c^p(\Omega)$ car $|u_i| \geq |u|$ et $|u|$ est nulle en dehors de K_{i+1}. A l'aide du TCD, nous allons montrer que la suite $(u_i)_{i\geq 1}$ converge vers u dans $L^p(\Omega)$. Soit $x \in \Omega$. On a : $|u_i(x) - u(x)|^p = |u(x)|^p|1 - \varphi_i(x)|^p$. Il existe i_0 tel que $x \in K_{i_0}$ et, si $i \geq i_0$, alors $K_{i_0} \subset K_i$ et $\varphi_i(x) = 1$. Donc, pour presque tout $x \in \Omega$, $|u_i(x) - u(x)|^p \to 0$ lorsque i tend vers l'infini (cette suite est même nulle à partir d'un certain rang). Comme de plus $|u_i(x) - u(x)|^p \leq |u(x)|^p$ et que $u \in L^p(\Omega)$, on peut appliquer le TCD pour obtenir la convergence voulue dans $L^p(\Omega)$.

2. On reprend la même idée de troncature et, si $u \in C^k(\Omega)$, on pose $u_i = \varphi_i u$. Alors $u_i \in C_0^k(\Omega)$. Soit $l \in \mathbb{N}$. On montre que $p_{K_l}(u_i - u) \to 0$ lorsque i tend vers l'infini. Par la formule de Leibniz :

$$\partial^\alpha(u_i - u) = \partial^\alpha((\varphi_i - 1)u) = (\varphi_i - 1)\partial^\alpha u + \sum_{\beta\leq\alpha,\beta\neq 0} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \partial^\beta \varphi_i \cdot \partial^{\alpha-\beta} u.$$

D'où,

$$\begin{aligned} p_{K_l}(u_i - u) &= \sum_{|\alpha|\leq l} \sup_{x\in K_l} |\partial^\alpha(u_i - u)| \\ &\leq \sum_{|\alpha|\leq l} \sup_{x\in K_l} |\varphi_i - 1| \sup_{x\in K_l} |\partial^\alpha u| + \sum_{|\alpha|\leq l} \sum_{\beta\leq\alpha,\beta\neq 0} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \sup_{x\in K_l} |\partial^\beta \varphi_i| \sup_{x\in K_l} |\partial^{\alpha-\beta} u|. \end{aligned}$$

Or, pour $i \geq l + 1$, $K_l \subset \overset{\circ}{K}_{l+1} \subset K_i$ et $\varphi_i = 1$ sur K_l. Le sup et le premier terme ci-dessus sont donc nuls. De plus, comme une constante est de dérivée nulle, on a aussi que $\partial^\beta \varphi_i$ est nulle sur K_l pour $\beta \neq 0$. Ainsi la seconde somme est elle aussi nulle. Donc pour $i \geq l + 1$, $p_{K_l}(u_i - u) = 0$ et l'on obtient le résultat voulu.

□

Nous devons maintenant montrer que l'on peut approcher des fonctions d'une régularité donnée par des fonctions de classe C^∞. Pour cela nous allons devoir faire des rappels sur la convolution des fonctions classiques. Ces rappels nous resserviront aussi pour mieux comprendre la convolution des distributions.

3.4.2 Produit de convolution

On se place dans l'espace mesuré $(\mathbb{R}^d, \mathcal{M}_L(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$. On veut définir le **produit de convolution** de deux fonctions f et g par la formule

$$\forall x \in \mathbb{R}^d,\ (f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)\mathrm{d}y.$$

Dans le cas de fonctions f et g positives, leur mesurabilité suffit pour que cette formule ait un sens. Sans cette hyptohèse de positivité, on peut encore définir le produit de convolution de f et de g à condition de supposer, en plus de leur mesurabilité, une régularité L^p.

Proposition 3.4.2. *Soit $p \in [1, +\infty]$. Soient $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$, la fonction $y \mapsto f(x-y)g(y)$ est intégrable. Alors le produit de convolution $f * g$ est défini presque partout, $f * g \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et*

$$\|f * g\|_p \leq \|f\|_p \ \|g\|_1 .$$

De plus, $f * g = g * f$.

Démonstration : Voir [4].

□

La dérivée se comporte bien vis-à-vis du produit de convolution. C'est une conséquence du théorème de dérivation sous le signe $\int$.

Proposition 3.4.3. *Soient $f \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$, $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. On suppose que f est de classe C^k et que ses dérivées partielles de tous ordres sont bornées. Alors $f * g$ est de classe C^k et, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$,*

$$\partial^\alpha (f * g) = (\partial^\alpha f) * g.$$

Démonstration : Pour presque tout $y \in \mathbb{R}^d$, la fonction $x \mapsto f(x-y)g(y)$ est dans $C^k(\mathbb{R}^d)$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$,

$$|\partial_x^\alpha (f(x-y)g(y))| = |(\partial^\alpha f)(x-y)g(y)| \leq ||\partial^\alpha f||_\infty \cdot |g(y)|.$$

Comme $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$, on peut appliquer le théorème de dérivation sous le signe intégral pour obtenir le résultat.

□

Proposition 3.4.4. *Soient $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ et $f \in L_c^p(\mathbb{R}^d)$. Alors $\varphi * f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$.*

Démonstration : Soient A et B deux réels tels que supp $\varphi \subset B(0, A)$ et $f(y) = 0$ pour $|y| \geq B$. Soit $x \in \mathbb{R}^d$ tel que $|x| > A + B$. Comme dans l'intégrale qui définie $\varphi * f$ on peut supposer que $x - y \in$ supp φ, on a $|x-y| \leq A$. Alors, $|y| \geq |x| - |x-y| > A + B - A = B$. Donc $f(y) = 0$. D'où, $(\varphi * f)(x) = 0$ pour tout x tel que $|x| > A + B$. Donc supp $(\varphi * f) \subset B(0, A+B)$.

□

3.4.3 Régularisation

Nous allons utiliser les résultats précédents pour montrer que l'on peut "régulariser" une fonction non régulière en la "convolant" par une fonction régulière. On commence par considérer une fonction "pic" ρ dont le support est inclus dans $B(0,1)$ et dont l'intégrale sur $\mathbb{R}^d$ vaut 1. Pour $\varepsilon > 0$, on pose : $\rho_\varepsilon = \varepsilon^{-d}\rho(\varepsilon^{-1}\cdot)$. La suite (ρ_ε) est appelée une "approximation de l'unité".

Proposition 3.4.5.

1. *Si $u \in C_0^k(\mathbb{R}^d)$, $k \in \mathbb{N}$, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$, $|\alpha| \le k$, $(\partial^\alpha(\rho_\varepsilon * u))$ converge vers $\partial^\alpha u$ uniformément sur $\mathbb{R}^d$ lorsque $\varepsilon \to 0$.*
2. *Si $u \in L_c^p(\mathbb{R}^d)$, $(\rho_\varepsilon * u)$ converge vers u dans $L^p(\mathbb{R}^d)$ lorsque $\varepsilon \to 0$, pour tout $1 \le p < +\infty$.*

Remarque 3.4.6. *Pour comprendre, on peut dessiner le "filtre" $\rho_\varepsilon *$ au voisnage de chaque point x, filtre qui s'affine de plus en plus lorsque ε tend vers 0.*

Démonstration : **1.** On suppose $|\alpha| \le k$. Comme $\int \rho = 1$, on peut écrire

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}^d,\ \partial^\alpha(\rho_\varepsilon * u)(x) - \partial^\alpha u(x) &= (\rho_\varepsilon * \partial^\alpha u)(x) - \partial^\alpha u(x)\\ &= \varepsilon^{-d}\int_{\mathbb{R}^d}\rho\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)\partial^\alpha u(y)\mathrm{d}y - \partial^\alpha u(x)\\ &= \int_{\mathbb{R}^d}\rho(z)\partial^\alpha u(x-\varepsilon z)\mathrm{d}z - \partial^\alpha u(x)\\ &= \int_{\mathbb{R}^d}\rho(z)(\partial^\alpha u(x-\varepsilon z) - \partial^\alpha u(x))\mathrm{d}z.\end{aligned}$$

Or, $\partial^\alpha u$ est continue à support compact car $u \in C_0^k(\mathbb{R}^d)$ donc elle est uniformément continue sur $\mathbb{R}^d$: $\forall\delta > 0,\ \exists\eta(\alpha,\delta) > 0,\ \forall x, x',\ |x - x'| < \eta(\alpha,\delta) \Rightarrow |\partial^\alpha u(x) - \partial^\alpha u(x')| \le \delta$. Fixons $\delta > 0$. Soit $\varepsilon > 0$ tel que $\varepsilon < \min_{|\alpha|\le k}\eta(\alpha,\delta) = \eta_\delta$. Alors, $|x - \varepsilon z - x| \le \varepsilon|z| < \eta_\delta$ sur le support de ρ (qui est inclus dans $B(0,1)$, d'où le $|z| \le 1$). Alors on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^d,\ |\partial^\alpha(\rho_\varepsilon * u)(x) - \partial^\alpha u(x)| \le \int_{\mathbb{R}^d}\rho(z)|\partial^\alpha u(x-\varepsilon z) - \partial^\alpha u(x)|\mathrm{d}z \le \delta,$$

toujours car $\int \rho = 1$. D'où la convergence uniforme voulue.

2. Soit q l'exposant associé à p : $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. On a :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}^d,\ |(\rho_\varepsilon * u)(x) - u(x)| &\le \int_{\mathbb{R}^d}\rho(z)|u(x-\varepsilon z) - u(x)|\mathrm{d}z\\ &= \int_{\mathbb{R}^d}\rho(z)^{1/q}\rho(z)^{1/p}|u(x-\varepsilon z) - u(x)|\mathrm{d}z\\ &\le \left(\int_{\mathbb{R}^d}\rho(z)\mathrm{d}z\right)^{1/q}\left(\int_{\mathbb{R}^d}\rho(z)|u(x-\varepsilon z) - u(x)|^p\mathrm{d}z\right)^{1/p}\\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^d}\rho(z)|u(x-\varepsilon z) - u(x)|^p\mathrm{d}z\right)^{1/p}.\end{aligned}$$

On élève les deux membres à la puissance p et on intègre en x sur $\mathbb{R}^d$. Alors, par Fubini,

$$||\rho_\varepsilon * u(x) - u(x)||^p_{L^p(\mathbb{R}^d)} \le \int_{\mathbb{R}^d}\rho(z)||u(\cdot - \varepsilon z) - u||^p_{L^p(\mathbb{R}^d)}\mathrm{d}z.$$

Comme $|z| \le 1$ et $u \in L^p(\mathbb{R}^d)$, on $||u(\cdot - \varepsilon z) - u||^p_{L^p(\mathbb{R}^d)} \to 0$ lorsque $\varepsilon \to 0$ (résultat classique d'intégration). Comme de plus, $\rho(z)||u(\cdot - \varepsilon z) - u||^p_{L^p(\mathbb{R}^d)} \le 2^p||u||^p_{L^p(\mathbb{R}^d)}\rho(z)$ et que ρ est intégrable, on peut appliquer le TCD pour obtenir que

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^d}\rho(z)||u(\cdot - \varepsilon z) - u||^p_{L^p(\mathbb{R}^d)}\mathrm{d}z = 0$$

et ainsi $||\rho_\varepsilon * u(x) - u(x)||^p_{L^p(\mathbb{R}^d)} \to 0$. D'où le résultat voulu.

□

Nous pouvons enfin démontrer le résultat de densité annoncé en introduction.

Théorème 3.4.7. *$C_0^\infty(\Omega)$ est dense dans $C^k(\Omega)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et dans $L^p(\Omega)$ pour tout $1 \leq p < +\infty$.*

Démonstration : Par la proposition 3.4.1, il suffit de montrer que $C_0^\infty(\Omega)$ est dense dans les espaces $C_0^k(\Omega)$ et $L_c^p(\Omega)$. Ecrivons la preuve pour $C_0^k(\Omega)$, celle pour $L_c^p(\Omega)$ étant exactement la même. Soit K un compact de Ω tel que $u = 0$ dans K^c. Soit $\tilde{u}$ le prolongement de u par 0 à tout $\mathbb{R}^d$. Alors $\tilde{u} \in C_0^k(\mathbb{R}^d)$. Soit $\varepsilon > 0$ et posons $\tilde{u}_\varepsilon = \rho_\varepsilon * \tilde{u}$. Posons enfin $u_\varepsilon = \tilde{u}_\varepsilon|_\Omega$. On a supp $\tilde{u}_\varepsilon \subset K_\varepsilon = K + \overline{B(0,\varepsilon)}$. Pour ε assez petit, $K_\varepsilon \subset \Omega$ et c'est un compact. Alors, d'après la proposition 3.4.4, $\tilde{u}_\varepsilon \in C_0^\infty(\Omega)$ et $u_\varepsilon \in C_0^\infty(\Omega)$. Or, par la proposition 3.4.3, $(\tilde{u}_\varepsilon)$ tend vers $\tilde{u}$ pour la topologie de $C^k(\mathbb{R}^d)$: si (K_i) est une exhaustion de Ω, pour tout i, $p_{K_i}(\tilde{u}_\varepsilon - \tilde{u}) \to 0$ lorsque $\varepsilon \to 0$. Or, pour tout i, $p_{K_i}(\tilde{u}_\varepsilon - \tilde{u}) = p_{K_i}(u_\varepsilon - u)$, donc (u_ε) tend vers u dans $C_0^k(\Omega)$, donc $C_0^\infty(\Omega)$ est dense dans $C_0^k(\Omega)$.

□

3.5 Application : Lemme de Dubois-Reymond

Ce résultat aura son importance théorique dans le prochain chapitre.

Lemme 3.5.1. *Soit $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. On suppose que, pour toute $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, $\int_\Omega f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = 0$. Alors $f = 0$ presque partout.*

Démonstration : Tout d'abord, on écrit que Ω est réunion dénombrable d'ouverts $\omega_n \subset \Omega$ tels que $\overline{\omega_n}$ soit un compact de Ω. Il suffit pour cela de prendre :

$$\omega_n = \left\{ x \in \Omega \ : \ |x| \leq n \text{ et } d(x, \Omega^c) > \frac{1}{n} \right\}.$$

Il suffit donc de montrer que $f = 0$ pp sur un ouvert $\omega \subset \Omega$ tels que $\overline{\omega}$ soit un compact de Ω. Soit $g = f|_\omega \in L^1(\omega)$. Soit $\varepsilon > 0$. Par le théorème 3.4.7, il existe $\psi_\varepsilon \in C_0^\infty(\omega)$ telle que $||g - \psi_\varepsilon||_{L^1(\omega)} \leq \varepsilon$. On a alors

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\omega), \int_\omega \psi_\varepsilon \varphi = \int_\omega (\psi_\varepsilon - g)\varphi + \int_\omega g\varphi = \int_\omega (\psi_\varepsilon - g)\varphi + 0$$

car $\int_\omega g\varphi = \int_\Omega f\varphi$. D'où

$$\left| \int_\omega \psi_\varepsilon \varphi \right| \leq \int_\omega |\psi_\varepsilon - g| \cdot |\varphi| \leq \varepsilon ||\varphi||_\infty.$$

Soit $\delta > 0$. On prend pour φ la fonction particulière définie par : $\varphi = \frac{\overline{\psi_\varepsilon}}{\sqrt{\delta^2 + |\psi_\varepsilon|^2}} \in C_0^\infty(\omega)$. On a $|\varphi| \leq 1$ et $\psi_\varepsilon \varphi = \frac{|\psi_\varepsilon|^2}{\sqrt{\delta^2 + |\psi_\varepsilon|^2}}$. Donc,

$$\forall \delta > 0, \int_\omega \frac{|\psi_\varepsilon|^2}{\sqrt{\delta^2 + |\psi_\varepsilon|^2}} \leq \varepsilon.$$

En appliquant le TCD on peut faire tendre $\delta \to 0$ pour obtenir $\int_\omega |\psi_\varepsilon| \leq \varepsilon$. D'où,

$$||g||_{L^1(\omega)} \leq ||g - \psi_\varepsilon||_{L^1(\omega)} + ||\psi_\varepsilon||_{L^1(\omega)} \leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Donc $||g||_{L^1(\omega)} = 0$ et g est nulle pp sur ω. Par recollement dénombrable on en déduit que f est nulle pp sur Ω.

$\square$

Chapitre 4

Distributions sur un ouvert de $\mathbb{R}^d$

La théorie des distributions a été introduite par Laurent Schwartz en 1945, posant les idées qui étaient déjà en germe chez Sobolev dans les années 30. La représentation des phénomènes physiques étendus dans l'espace par des fonctions de plusieurs variables et l'expression des lois physiques en termes d'équations aux dérivées partielles ont été un grand progrès dans l'étude de ces phénomènes. Toutefois, cette représentation par une fonction assignant une valeur en chaque point pose au moins deux problèmes d'ordre physique.

Le premier est que les quantités physiques *en un point* n'ont pas de sens. Par exemple, la température est une conséquence du mouvement des molécules. Dans un volume plus petit que le libre parcours moyen d'une molécule, parler de température en un point précis ne signifie donc rien. Pourtant, l'équation de la chaleur classique donne, à l'échelle macroscopique, des résultats qui sont conformes aux expériences.

Le second est qu'une valeur ponctuelle pour une quantité physique est impossible à mesurer avec un appareil de mesure. Ce dernier a nécessairement une certaine étendue spatiale et ne pourra donc jamais fournir une valeur $f(x_0)$ d'une fonction f en un point x_0. Le mieux que l'on puisse obtenir est une moyenne pondérée $\int f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x$ où φ caractérise l'appareil de mesure et est supportée au voisinage de x_0 avec une intégrale proche de 1 pour un appareil précis et bien réglé.

Dans ce chapitre nous allons systématiser l'idée qui consiste à ne plus considérer des fonctions définies point par point, mais globalement, par des moyennes locales. Nous allons donc substituer aux fonctions classiques des formes linéaires sur l'espace des fonctions test. Nous avons déjà vu cette idée se dessiner dans le chapitre 2.

Un des buts de cette théorie est d'apporter un sens à des objets abstraits comme l'impulsion de Dirac, mais aussi de pouvoir "dériver" des fonctions qui ne sont pas dérivables, comme par exemple des fonctions L^1 ou L^2 ou seulement continues. Nous verrons comment cela peut nous aider à résoudre des problèmes d'EDP qui n'ont pas a priori de solutions classiques simples.

Dans tout ce chapitre, Ω désigne un ouvert de $\mathbb{R}^d$.

4.1 Définitions

Nous allons donner deux définitions équivalentes de la notion de distribution, l'une fonctionnelle et théorique dans laquelle la continuité est exprimée topologiquement, une autre effective dans laquelle la continuité est exprimée directement par des estimations.

4.1.1 Définition fonctionnelle

Définition 4.1.1. *Une distribution sur l'ouvert Ω est une forme linéaire $T : C_0^\infty(\Omega) \to \mathbb{C}$ continue en* 0, i.e. *telle que, pour toute suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $C_0^\infty(\Omega)$ qui converge vers 0, $< T, \varphi_n > \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. On notera $\mathcal{D}'(\Omega)$ l'ensemble des distributions sur Ω.*

Le symbole $< T, \varphi_n >$ désigne ici un crochet de dualité, il signifie simplement l'action de T sur $\varphi_n : T(\varphi_n)$. $\mathcal{D}'(\Omega)$ n'est autre que le dual topologique de $C_0^\infty(\Omega)$.
La convergence dans $C_0^\infty(\Omega)$ étant une condition très contraignante, la condition de continuité vis-à-vis de cette topologie est très forte et cela impliquera donc de nombreuses propriétés pour les distributions.
Cette définition abstraite des distributions pourra être utilisée pour des questions théoriques, mais pour montrer en pratique qu'une forme linéaire sur $C_0^\infty(\Omega)$ est une distribution, nous lui préfèrons la définition qui suit.

4.1.2 Définition par l'ordre

Proposition 4.1.2. *Une forme linéaire T sur $C_0^\infty(\Omega)$ est une distribution sur Ω si et seulement si, pour tout compact K de Ω, il existe $m \in \mathbb{N}$ et $C_{K,m} > 0$ tels que, pour toute fonction test $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ telle que* supp $\varphi \subset K$,

$$| < T, \varphi > | \leq C_{K,m} \max_{|\alpha|\leq m} \max_{x\in K} |\partial^\alpha \varphi(x)|.$$

Notation. On pourra noter $p_m(\varphi) = \max_{|\alpha|\leq m} \max_{x\in K} |\partial^\alpha \varphi(x)|$.

Démonstration : Supposons que $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Fixons un compact $K \subset \Omega$ sur lequel :

$$\forall m \in \mathbb{N}, \forall C > 0, \exists \varphi \in C_K^\infty(\Omega),\ | < T, \varphi > | > C p_m(\varphi).$$

Prenons, pour tout $m \in \mathbb{N}$, $C = m$. Il existe alors $\varphi_m \in C_K^\infty(\Omega)$, $| < T, \varphi_m > | > m p_m(\varphi_m)$. Posons $\tilde{\varphi}_m = \frac{\varphi_m}{< T, \varphi_m >}$. Alors, $< T, \tilde{\varphi}_m >= 1$ et supp $\tilde{\varphi}_m \subset K$. De plus,

$$p_m(\tilde{\varphi}_m) = \frac{p_m(\varphi_m)}{< T, \varphi_m >} < \frac{1}{m} \xrightarrow[m\to\infty]{} 0.$$

Soit $k \in \mathbb{N}$. Alors, $\forall m \geq k$, $p_k(\tilde{\varphi}_m) \leq p_m(\tilde{\varphi}_m) \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$. Cela signifie exactement que la suite $(\tilde{\varphi}_m)$ tend vers 0 dans $C_0^\infty(\Omega)$. Or, $< T, \tilde{\varphi}_m >= 1$ ne tend pas vers 0 ce qui contredit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

Montrons la réciproque. Soit (φ_n) une suite qui converge vers 0 dans $C_0^\infty(\Omega)$. Soit K un compact qui contient tous les supp φ_n. Par définition de la convergence dans $C_0^\infty(\Omega)$ on a, pour tout $m \in \mathbb{N}$, $p_m(\varphi_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Alors : $| < T, \varphi_n > | \leq C_{K,m} p_m(\varphi_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Donc $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

□

Cette caractérisation des distributions sera constamment utilisée par la suite. Elle mène aussi directement à la notion d'ordre d'une distribution.

4.1.3 Ordre d'une distribution

Dans la définition d'une distribution, l'entier m dépend a priori du choix du compact K. Si on peut trouver un entier m qui convient pour tous les compacts K de Ω, on dira que la distribution est d'ordre fini.

Définition 4.1.3. *Une forme linéaire T sur $C_0^\infty(\Omega)$ est une distribution* ***d'ordre fini au plus m*** *sur Ω lorsqu'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout compact K de Ω, il existe $C_K > 0$ telle que, pour toute fonction test $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, $\operatorname{supp} \varphi \subset K$,*

$$| < T, \varphi > | \leq C_K \max_{|\alpha| \leq m} \max_{x \in K} |\partial^\alpha \varphi(x)|.$$

Le plus petit entier m possible est appelé l'ordre de la distribution T.

L'ordre de T est le plus petit nombre de dérivées qu'il nous faut pour contrôler l'action de T sur les fonctions test.
Nous allons maintenant donner quelques exemples de distributions en précisant à chaque fois leur ordre.

4.2 Premiers exemples

4.2.1 Distribution associée à une fonction L^1_{loc}

Une des premières choses à vérifier est que la théorie des distributions généralise bien la théorie des fonctions classiques, typiquement des fonctions intégrables. On va donc montrer comment les fonctions $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ s'injectent dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Proposition 4.2.1. *Soit $f \in L^1_{loc}(\Omega)$. On peut lui associer une distribution sur $C_0^\infty(\Omega)$, notée T_f, telle que*

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega), < T_f, \varphi >= \int_\Omega f \varphi \mathrm{d}x.$$

Cette distribution est d'ordre 0.

Démonstration : Tout d'abord, on vérifie que, comme f est $L^1_{loc}(\Omega)$, sa restriction à tout compact est L^1. Ainsi, sur le support de $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, elle est L^1. Comme φ est bornée, car continue sur le compact où elle est supportée, on en déduit que $f\varphi$ est L^1, et que

$$\left| \int_\Omega f \varphi \mathrm{d}x \right| \leq \max_{x \in \operatorname{supp} \varphi} |\varphi(x)| \int_{\operatorname{supp} \varphi} |f| \mathrm{d}x.$$

La forme linéaire $\varphi \to \int_\Omega f \varphi dx$ est donc bien une distribution, qui plus est d'ordre au plus 0, donc d'ordre 0.

□

Par ailleurs, le lemme de Dubois-Reymond nous permet d'identifier T_f à la fonction f de manière unique. L'application $f \mapsto T_f$ est une injection de $L^1_{loc}(\Omega)$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. Dans la suite nous ferons donc presque toujours l'abus de langage qui consiste à identifier T_f à f. Nous écrirons par exemple "soit f la distribution...".

4.2.2 Distribution de Dirac

Nous avons déjà rencontré cette distribution au chapitre 2. Nous allons maintenant en donner sa définition précise.

Définition 4.2.2. *Soit $a \in \Omega$. La forme linéaire $\delta_a : C_0^\infty(\Omega) \to \mathbb{C}$ définie par*

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega), < \delta_a, \varphi >= \varphi(a)$$

est une distribution sur Ω, d'ordre 0.

Démonstration : Soit K un compact de Ω et soit $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ telle que supp $\varphi \subset K$. Alors, $| < \delta_a, \varphi > | \leq 1 \cdot ||\varphi||_\infty$. Donc δ_a est une distribution d'ordre au plus 0 donc 0 sur Ω.

□

La distribution de Dirac est un nouvel objet de la théorie des distributions. En effet, on peut montrer qu'il n'existe pas de fonction $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ telle que $\delta_a = T_f$. Si cela était le cas, en fixant un compact $K \subset \Omega$, on aurait :

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega),\ \text{supp } \varphi \subset K,\ < \delta_a, \varphi >= \varphi(a) = \int_K f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x.$$

Alors, si $a \notin$ supp φ, $\int_K f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = 0$. Donc, pour toute $\varphi \in C_0^\infty(\Omega \setminus \{a\})$, $\int_K f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = 0$. Par le lemme de Dubois-Reymond, $f = 0$ pp sur $\Omega \setminus \{a\}$, donc sur Ω. Mais alors, pour toute $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, $\int_K f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = \int_K 0 \cdot \varphi(x)\mathrm{d}x = 0 = \varphi(a)$. En choisissant φ telle que $\varphi(a) \neq 0$ on aboutit à une contradiction.

4.2.3 Distribution de Dirac dérivée

Nous pouvons aussi définir sur le modèle de la distribution de Dirac une distribution d'ordre fini de n'importe quel ordre. Soient $a \in \Omega$ et $\alpha \in \mathbb{N}^d$. Posons, pour toute $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$,

$$< T, \varphi >= \partial^\alpha \varphi(a).$$

Montrons que T ainsi définie est une distribution d'ordre exactement $|\alpha|$. Tout d'abord, il est clair que c'est bien une distribution d'ordre au plus $|\alpha|$. En effet, si K est un compact de Ω, on a

$$| < T, \varphi > | = |\partial^\alpha \varphi(a)| \leq ||\partial^\alpha \varphi||_\infty.$$

Soit $k < |\alpha|$. Montrons que T n'est pas d'ordre k. On raisonne par l'absurde. Supposons que, pour tout compact K de Ω, il existe $C_K > 0$ telle que :

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega),\ \text{supp } \varphi \subset K,\ |\partial^\alpha \varphi(a)| \leq C_K \max_{|\beta| \leq k} ||\partial^\beta \varphi||_\infty.$$

Soit $\varepsilon > 0$ et prenons comme compact $K = \overline{B(a, \varepsilon)}$. Fixons $\psi_0 \in C_0^\infty(B(0, \varepsilon))$ telle que $\psi_0(x) = 1$ pour $|x| \leq \varepsilon/2$. Posons alors $\psi(x) = \frac{x^\alpha}{\alpha!}\psi_0(x)$. Par la formule de Leibniz, on a $\partial^\alpha \psi(0) = \psi_0(0) = 1$. Posons enfin $\varphi(x) = \psi(\lambda(x - a))$ où $\lambda \geq 1$. Comme supp $\varphi \subset B(a, \frac{\varepsilon}{\lambda}) \subset B(a, \varepsilon) \subset K$, on a bien supp $\varphi \subset K$. De plus, $\partial^\alpha \varphi(a) = \lambda^{|\alpha|}\partial^\alpha \psi(0) = \lambda^{|\alpha|}$. Pour $|\beta| \leq k$,

$$|\partial^\beta \varphi(x)| = \lambda^{|\beta|}|\partial^\beta \psi(\lambda(x - a))| \leq \lambda^k ||\partial^\beta \psi||_\infty.$$

Alors, pour tout $\lambda \geq 1$, on devrait avoir,

$$\lambda^{|\alpha| - k} \leq C_K \max_{|\beta| \leq k} ||\partial^\beta \psi||_\infty < +\infty.$$

On aboutit à une contradiction en faisant tendre λ vers $+\infty$ puisque $|\alpha| - k \geq 1$. Donc T ne peut pas être d'ordre $k < |\alpha|$, donc T est d'ordre exactement $|\alpha|$.

4.2.4 Mesures de Radon

Soit μ une mesure de Radon sur Ω. La forme linéaire $\varphi \in C_0^\infty(\Omega) \mapsto \int_\Omega \varphi \mathrm{d}\mu$ est une distribution d'ordre 0 sur Ω.

Théorème 4.2.3. *Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ d'ordre 0. Alors, il existe une mesure de Radon μ sur Ω telle que*

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega),\ < T, \varphi >= \int_\Omega \varphi \mathrm{d}\mu.$$

Démonstration : On admettra ce théorème. La démonstration se base sur le fait que les mesures de Radon positives sur Ω s'identifient aux formes linéaires positives sur $C_0(\Omega)$ par

$$\mu \mapsto \left(f \in C_0(\Omega) \mapsto \int_\Omega f \mathrm{d}\mu \right).$$

C'est le théorème de représentation de Riesz.

□

4.2.5 Distributions positives

On dit qu'une distribution $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ est positive lorsque :

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega),\ \varphi \geq 0\ \Rightarrow < T, \varphi > \geq 0.$$

Montrons que toute distribution positive est d'ordre 0.

En effet, soit K un compact de Ω et soit $\chi \in C_0^\infty(\Omega)$, $\chi = 1$ sur K et $0 \leq \chi \leq 1$. Si $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, supp $\varphi \subset K$ et φ réelle, alors les fonctions $\psi_\pm : x \mapsto \chi(x) \sup_{x \in K} |\varphi(x)| \pm \varphi(x)$ sont dans $C_0^\infty(\Omega)$ et sont positives. Alors, $< T, \psi_\pm > \geq 0$. D'où,

$$| < T, \varphi > | \leq | < T, \chi > | \cdot \sup_{x \in K} |\varphi(x)| = C_K \sup_{x \in K} |\varphi(x)|,$$

ce qui signifie que T est d'ordre au plus 0 donc d'ordre 0.

4.2.6 La valeur principale de $\frac{1}{x}$

La fonction inverse, $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ n'est pas dans $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$, on ne peut donc pas définir à partir de cette fonction une distribution comme on l'a fait auparavant. Cependant, en prenant garde à éviter la singularité en 0 et en effectuant une intégration "symétrique" par rapport à 0, on va tout de même pouvoir associer une distribution à f.

Définition 4.2.4. *Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. On pose*

$$\left\langle \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right), \varphi \right\rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x| > \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} \mathrm{d}x.$$

Alors vp $\left(\frac{1}{x}\right)$ *est une distribution sur $\mathbb{R}$ d'ordre exactement* 1.

Démonstration : Soit K un compact de $\mathbb{R}$ et supposons que $K \subset [-a, a]$ pour a un réel positif. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ telle que supp $\varphi \subset K$. Alors,

$$\left\langle \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right), \varphi \right\rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon < |x| \leq a} \frac{\varphi(x)}{x} \mathrm{d}x.$$

Pour "annuler" la singularité en 0, l'idée est de faire un développement de Taylor de φ en 0. Par la formule de Taylor avec reste intégral, on peut écrire

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(x) = \varphi(0) + x\psi(x),\ \text{avec}\ \psi(x) = \int_0^1 \varphi'(tx)\mathrm{d}t,\ \psi \in C^\infty(\mathbb{R})\ \text{et}\ |\psi(x)| \leq ||\varphi'||_\infty.$$

On écrit alors, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\int_{\varepsilon<|x|\leq a} \frac{\varphi(x)}{x}\mathrm{d}x = \varphi(0)\int_{\varepsilon<|x|\leq a} \frac{\mathrm{d}x}{x} + \int_{\varepsilon<|x|\leq a} \psi(x)\mathrm{d}x := I_1 + I_2.$$

Par imparité de la fonction f et symétrie par rapport à 0 du domaine d'intégration, l'intégrale I_1 est nulle. Dans l'intégrale I_2, la fonction ψ étant continue en 0, on peut appliquer le TCD pour obtenir que la limite lorsque ε tend vers 0 de I_2 existe et vaut $\int_{|x|\leq a} \psi(x)\mathrm{d}x$. La définition de vp $\left(\frac{1}{x}\right)$ est donc justifiée, la limite existe et on a :

$$\left\langle \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right), \varphi \right\rangle = \int_{|x|\leq a} \psi(x)\mathrm{d}x.$$

De plus,

$$\left| \left\langle \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right), \varphi \right\rangle \right| \leq 2a \times \sup_{x\in K} |\varphi'(x)|.$$

On en déduit que vp $\left(\frac{1}{x}\right)$ est une distribution d'ordre au plus 1. Il nous reste à justifier qu'elle ne peut pas être d'ordre 0. Si elle était d'ordre 0 on aurait l'existence d'une constante $C > 0$ telle que :

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}),\ \mathrm{supp}\ \varphi \subset K,\ \left| \left\langle \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right), \varphi \right\rangle \right| \leq C||\varphi||_\infty.$$

Pour $n \geq 1$, on considère la fonction plateau qui vaut 1 sur le compact $[\frac{1}{n}, 1]$ et qui est nulle hors de l'ouvert $]\frac{1}{2n}, 2[$. Alors, $||\varphi_n||_\infty = 1$ et, pour $\varepsilon \leq \frac{1}{2n}$, on a (par positivité de φ_n)

$$\int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi_n(x)}{x}\mathrm{d}x = \int_{\frac{1}{2n}}^2 \frac{\varphi_n(x)}{x}\mathrm{d}x \geq \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{\varphi_n(x)}{x}\mathrm{d}x = \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{\mathrm{d}x}{x} = \log n.$$

Ainsi, pour tout $n \geq 1$,

$$\log n \leq \left| \left\langle \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right), \varphi \right\rangle \right| \leq C||\varphi_n||_\infty = C.$$

D'où la contradiction lorsque $n \to \infty$.

$\square$

Comme vp $\left(\frac{1}{x}\right)$ est d'ordre 1 on en déduit en particulier qu'il n'existe pas de fonction $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ telle que vp $\left(\frac{1}{x}\right) = T_f$.
Cette distribution apparaîtra à nouveau plus loin dans le cours et en TDs. Tout comme la distribution de Dirac, elle constitue un des premiers exemples d'objets nouveaux introduits par la théorie des distributions.

4.2.7 Partie finie de x^α

On peut chercher à continuer à intégrer des fonctions non intégrables, par exemple x^α pour $-2 < \alpha < -1$ et $x > 0$. On vérifie que

$$\int_\varepsilon^a x^\alpha \varphi(x)\mathrm{d}x = \int_\varepsilon^a x^\alpha \varphi(0)\mathrm{d}x + \int_\varepsilon^a x\varphi'(0)\mathrm{d}x + ...$$

(sans préciser le reste de Taylor). Le premier terme vaut $\frac{a^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{\varepsilon^{\alpha+1}}{\alpha+1}$, qui tend vers $+\infty$ lorsque $\varepsilon \to 0$. Il s'agit de la partie infinie de x^α. Plus précisément, on a l'égalité, valable pour φ à support compact et $a \notin \operatorname{supp}\varphi$:

$$\int_\varepsilon^a x^\alpha \varphi(x)\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\varphi(x)\right]_\varepsilon^a - \int_\varepsilon^a \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\varphi'(x)\mathrm{d}x = -\frac{\varepsilon^{\alpha+1}}{\alpha+1}\varphi(\varepsilon) - \int_\varepsilon^a \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\varphi'(x)\mathrm{d}x.$$

La fonction $\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ est, quant à elle, intégrable car $\alpha + 1 > -1$, donc définit une distribution. On voit donc apparaitre la partie finie.

Définition 4.2.5. *La partie finie de x^α, notée $\mathrm{Pf}(x^\alpha)$ est la distribution définie par*

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}),\ < \mathrm{Pf}(x^\alpha), \varphi >= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_\varepsilon^\infty x^\alpha\varphi(x)\mathrm{d}x + \frac{\varepsilon^{\alpha+1}}{\alpha+1}\varphi(\varepsilon)\right) = -\int_0^\infty \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\varphi'(x)\mathrm{d}x.$$

On peut définir de même $\mathrm{Pf}(x^\alpha)$ pour $\alpha \in]-n-1, -n[$, grâce à

$$< \mathrm{Pf}(x^\alpha), \varphi >= (-1)^n \int_0^\infty \frac{x^{\alpha+n}}{(\alpha+1)...(\alpha+n)}\varphi^{(n)}(x)\mathrm{d}x.$$

Il existe d'autres façons de définir les parties finies. Par exemple, lorsque $-n-1 < \alpha < -n$, $n \geq 1$, on retranche la partie infinie obtenue en écrivant le développement de Taylor de φ à l'ordre $n-1$, soit

$$\varphi(x) = \sum_{j=0}^{n-1}\frac{x^j}{j!}\varphi^{(j)}(0) + x^n\psi_n(x)$$

et on calcule ainsi la limite, lorsque $\varepsilon \to 0$, de

$$\int_\varepsilon^{+\infty} x^\alpha\varphi(x)\mathrm{d}x + \sum_{j=0}^{n-1}\frac{\varepsilon^{\alpha+j+1}}{(j+\alpha+1)j!}\varphi^{(j)}(0).$$

Cette limite est notée $< \mathrm{Pf}(x^\alpha), \varphi >$ et définit une distribution d'ordre n. Les cas $\alpha = -n$ donnent les valeurs principales. Par exemple, pour $\alpha = -2$, en pensant à intégrer de manière symétrique comme pour la valeur principale de $\frac{1}{x}$, on obtient

$$\int_{|x|\geq\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x^2}\mathrm{d}x - \frac{2\varphi(0)}{\varepsilon} = \int_\varepsilon^\infty\int_0^1(1-t)[\varphi''(xt)+\varphi''(-xt)]\mathrm{d}t.$$

Le membre de droite définit, à la limite $\varepsilon \to 0$, une distribution d'ordre 2, qui est la partie finie de $\frac{1}{x^2}$ en valeur principale.

4.2.8 Un exemple de distribution d'ordre infini

Soit T la forme linéaire sur $C_0^\infty(\mathbb{R})$ définie par

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}),\ < T, \varphi >= \sum_{j=0}^{+\infty} \varphi^{(j)}(j).$$

Alors, T est une distribution sur $\mathbb{R}$ d'ordre infini. On peut reprendre en l'adaptant légèrement la preuve donné pour la distribution de Dirac dérivée.
Soit $[-a, a] \subset \mathbb{R}$ et soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, supp $\varphi \subset [-a, a]$. Posons $p_0 = E(a) + 1$, où $E(a)$ est la partie entière de a. On a :

$$| < T, \varphi > | = \left| \sum_{j=0}^{+\infty} \varphi^{(j)}(j) \right| = \left| \sum_{j=0}^{p_0} \varphi^{(j)}(j) \right| \leq \sum_{j=0}^{p_0} ||\varphi^{(j)}||_\infty.$$

Donc $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.
Supposons par l'absurde que T est d'ordre fini m. Soit $\psi_0 \in C_0^\infty(]-1/2, 1/2[)$, égale à 1 sur $[-1/4, 1/4]$ et positive. Soit $\lambda > 1$. Posons $\psi(x) = \frac{x^{m+1}}{(m+1)!}\psi_0(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$ et $\varphi(x) = \psi(\lambda(x - (m+1)))$. On considère le compact $K = [m + 1/2, m + 3/2] \subset \mathbb{R}$. Comme $\lambda > 1$, φ est à support dans K et elle est C^∞.
D'autre part, par la formule de Leibniz, on a : $\psi^{(m+1)}(0) = \psi_0(0) = 1$. Puis, comme supp $\varphi \subset K$, on a $< T, \varphi >= \varphi^{(m+1)}(m+1) = \lambda^{m+1}\psi^{(m+1)}(0) = \lambda^{m+1}$. D'autre part, pour $j \leq m$,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |\varphi^{(j)}(x)| \leq \lambda^j \sup_{x \in \mathbb{R}} |\psi^{(j)}(x)| \leq \lambda^j ||\psi^{(j)}||_\infty.$$

Or, T est supposée d'ordre m, donc pour $K = [m + 1/2, m + 3/2]$, il existe $C_K > 0$ telle que

$$| < T, \varphi > | \leq C_K \sum_{j=0}^{m} ||\varphi^{(j)}||_\infty,$$

soit ici :

$$\lambda^{m+1} \leq C_K \sum_{j=0}^{m} \lambda^j ||\psi^{(j)}||_\infty \leq C_K \left(\sum_{j=0}^{m} \lambda^j ||\psi^{(j)}||_\infty \right) \lambda^m.$$

Or cela conduit à une contradiction lorsque λ tend vers l'infini car on a :

$$\lambda \leq C_K \sum_{j=0}^{m} \lambda^j ||\psi^{(j)}||_\infty < +\infty.$$

Donc T ne peut être d'ordre fini.

4.3 Convergence des suites de distributions

Nous allons voir que les suites de distributions étant des suites d'applications linéaires continues, elles se comportent de manière très "simple". Cela est principalement dû au théorème de Banach-Steinhaus qui est un résultat d'uniformisation des bornes sur les familles de formes linéaires continues sur un espace de Banach (voir [4], Chapitre 17). Commençons par donner la définition de la convergence dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Définition 4.3.1. *On dit qu'une suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de distributions sur Ω converge vers $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ lorsque, pour toute fonction $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$,*

$$\lim_{n \to \infty} < T_n, \varphi >=< T, \varphi > .$$

Exemple 4.3.2. *La suite de distributions $(T_n)_{n\geq 1}$ définie par : $\forall n \geq 1,\ T_n = n(\delta_{\frac{1}{n}} - \delta_{-\frac{1}{n}})$, converge dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ vers $-2\delta_0'$. En effet, pour $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, on peut écrire $\varphi(x) = \varphi(0) + x\psi(x)$ avec $\psi(x) = \int_0^1 \varphi'(xu)\mathrm{d}u$. Alors,*

$$< T_n, \varphi >= n\left(\varphi\left(\frac{1}{n}\right) - \varphi\left(-\frac{1}{n}\right)\right) = \psi\left(\frac{1}{n}\right) + \psi\left(-\frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 2\psi(0) = 2\varphi'(0).$$

D'où le résultat.

Exemple 4.3.3. *La suite $(T_{e^{in\cdot}})_{n\geq 0}$ converge vers la distribution nulle dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. Il s'agit juste du lemme de Riemann-Lebesgue.*

Proposition 4.3.4. *La convergence dans $L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, $1 \leq p \leq +\infty$ implique la convergence dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.*

Démonstration : Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions dans $L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ qui converge vers f dans $L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Soit q tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Soit $K \subset \Omega$ un compact et soit $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, supp $\varphi \subset K$. Par l'inégalité de Hölder,

$$\begin{aligned} | < T_{f_n}, \varphi > - < T_f, \varphi > | &= | < T_{f_n} - T_f, \varphi > | \leq \int_K |f_n(x) - f(x)| \cdot |\varphi(x)|\mathrm{d}x \\ &\leq ||f_n - f||_{L^p(K)} ||\varphi||_{L^q(K)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \end{aligned}$$

□

Exemple 4.3.5. *La convergence presque partout n'implique pas la convergence dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. En effet, considérons la suite de $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ définie par $f_n : x \mapsto \sqrt{n}e^{-nx^2}$. Alors, pour tout $x \neq 0$, $f_n(x) \to 0$, mais la suite $(T_{f_n})_{n\geq 1}$ converge dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ vers $\sqrt{\pi}\delta_0$ et non pas vers la distribution nulle. En effet, si $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, on a par le TCD,*

$$< f_n, \varphi >= \sqrt{n}\int_{\mathbb{R}} e^{-nx^2}\varphi(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2}\varphi\left(\frac{y}{\sqrt{n}}\right)\mathrm{d}y \xrightarrow[n\to\infty]{} \sqrt{\pi}\varphi(0) =< \sqrt{\pi}\delta_0, \varphi > .$$

On a le théorème suivant dont la démonstration (difficile et basée sur Banach-Steinhaus) est admise ici (voir [1, C.3.4, p245] ou [6, p58]).

Théorème 4.3.6 (Admis). *Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de distributions telle que, pour toute $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, la suite $(< T_n, \varphi >)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite dans $\mathbb{C}$. Alors la forme linéaire T définie sur $C_0^\infty(\Omega)$ par*

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega),\ < T, \varphi >= \lim_{n\to+\infty} < T_n, \varphi >$$

est une distribution sur Ω. De plus, pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe $m \in \mathbb{N}$ et $C > 0$ tels que,

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega),\ \mathrm{supp}\ \varphi \subset K,\ \sup_{n\in\mathbb{N}} | < T_n, \varphi > | \leq Cp_m(\varphi).$$

Le point clé ici est le fait que l'on peut trouver une constante $C > 0$ et un entier $m \in \mathbb{N}$ indépendants de n. On a aussi le corollaire suivant.

Corollaire 4.3.7. *Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de distributions qui converge vers T dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ et soit $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui converge vers φ dans $C_0^\infty(\Omega)$. Alors $< T_n, \varphi_n > \xrightarrow[n\to\infty]{} < T, \varphi >$.*

Nous allons montrer au chapitre sur la convolution des distributions que toute distribution est limite dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ d'une suite de fonctions dans $C_0^\infty(\Omega)$.

Nous terminons cette section par un résultat d'approximation de la distribution de Dirac en 0 par des fonctions L^1.

Proposition 4.3.8. *Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions positives dans $L^1(\mathbb{R}^d)$, dont les supports sont contenus dans des boules centrées à l'origine et de rayon tendant vers 0. Alors*

$$\frac{1}{\int_{\mathbb{R}^d} f_n \mathrm{d}x} f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \delta_0 \quad \textit{dans} \quad \mathcal{D}'(\Omega).$$

Démonstration : Soit a_n le rayon de la boule, $a_n \to 0$. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. En posant $x = a_n t$,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ < f_n, \varphi >= a_n^d \int_{|t|\leq 1} f_n(a_n t)\varphi(a_n t)\mathrm{d}t.$$

On écrit

$$\frac{< f_n, \varphi >}{< f_n, 1 >} - \varphi(0) = \frac{a_n^d \int_{|t|\leq 1} f_n(a_n t)(\varphi(a_n t) - \varphi(0))\mathrm{d}t}{a_n^d \int_{|t|\leq 1} f_n(a_n t)\mathrm{d}t}.$$

On utilise ensuite le fait que, pour $a_n < 1$ et $|t| \leq 1$, par la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 1,

$$|\varphi(a_n t) - \varphi(0)| \leq a_n \max_{|\alpha|=1} \max_{|x|\leq 1} |\partial^\alpha \varphi(x)|$$

pour trouver

$$\left| \frac{< f_n, \varphi >}{< f_n, 1 >} - \varphi(0) \right| \leq a_n \max_{|\alpha|=1} \max_{|x|\leq 1} |\partial^\alpha \varphi(x)|.$$

D'où le résultat.

$\square$

Chapitre 5

Opérations sur les distributions

5.1 Multiplication par une fonction C^∞

Définition 5.1.1. *Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et soit $a \in C^\infty(\Omega)$. La forme linéaire aT définie sur $C_0^\infty(\Omega)$ par :*

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega),\ < aT, \varphi >=< T, a\varphi >$$

est une distribution appelée produit de a par T.

Démonstration : Tout d'abord, on a bien $a\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ donc le membre de droite est bien défini.
Puis, soit $K \subset \Omega$ un compact : il existe $m \in \mathbb{N}$ et $C > 0$ tels que,

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega),\ | < T, \varphi > | \leq C p_m(\varphi).$$

Alors,

$$| < aT, \varphi > | = | < T, a\varphi > | \leq C p_m(a\varphi).$$

Or, par la formule de Leibniz :

$$\partial^\alpha(a\varphi) = \sum_{\beta \leq \alpha} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \partial^\beta a \cdot \partial^{\alpha-\beta}\varphi.$$

Alors,

$$\max_{x\in K} |\partial^\alpha(a\varphi)(x)| \leq 2^{|\alpha|} \max_{|\beta_1|\leq|\alpha|} \max_{x\in K} |\partial^{\beta_1} a(x)| \cdot \max_{|\beta_2|\leq|\alpha|} \max_{x\in K} |\partial^{\beta_2}\varphi(x)| := \tilde{C} p_m(\varphi),$$

d'où, $p_m(a\varphi) \leq \tilde{C} p_m(\varphi)$ et on a finalement,

$$| < aT, \varphi > | \leq C p_m(a\varphi) \leq (C\tilde{C}) p_m(\varphi),$$

ce qui montre que aT est une distribution sur Ω.

□

Nous avons facilement les propriétés suivantes. Pour $a, b \in C^\infty(\Omega)$ et $T, S \in \mathcal{D}'(\Omega)$,

$$(a+b)T = aT + bT, \quad (ab)T = a(bT), \quad a(S+T) = aS + aT.$$

De plus, la multiplication par une fonction C^∞ est une opération continue.

Proposition 5.1.2. *Soient $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $a \in C^\infty(\Omega)$. Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite qui converge vers a dans $C^\infty(\Omega)$ et soit $(T_n)_{n\geq 0}$ une suite qui converge vers T dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. On a alors, avec convergence dans $\mathcal{D}'(\Omega)$,*

$$a_n T \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} aT, \quad aT_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} aT \quad \text{et} \quad a_n T_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} aT.$$

Démonstration : Bien entendu, il suffit de montrer le troisième point. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Posons pour tout n, $\psi_n = a_n\varphi$. Alors, $\psi_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a\varphi$ dans $C_0^\infty(\Omega)$ par la formule de Leibniz, donc

$$< a_n T_n, \varphi >=< T_n, \psi_n > \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} < T, a\varphi >=< aT, \varphi > .$$

Nous avons utilisé ici le corollaire 4.3.7.

□

Exemple 5.1.3. *Si $a \in C^\infty(\Omega)$ et si $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, on a : $aT_f = T_{af}$.*

Exemple 5.1.4. *Si $a \in C^\infty(\Omega)$ et si $x_0 \in \Omega$, on a : $a\delta_{x_0} = a(x_0)\delta_{x_0}$. En particulier dans $\mathbb{R}$, $x\delta_0 = 0$. La vérification est ici immédiate.*

Exemple 5.1.5. *On a : $x\text{vp}\left(\frac{1}{x}\right) = 1$. En effet, si $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, on a*

$$\left\langle x\text{vp}\left(\frac{1}{x}\right), \varphi\right\rangle = \left\langle \text{vp}\left(\frac{1}{x}\right), x\varphi\right\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|>\varepsilon} \frac{x\varphi(x)}{x}\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|>\varepsilon}\varphi(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}}\varphi(x)\mathrm{d}x =< 1, \varphi >,$$

par intégrabilité en 0 de la fonction continue φ.

Exemple 5.1.6. *Soit $-2 < \alpha < -1$. On a $x\text{Pf}(x^\alpha) = x^{\alpha+1}$. En effet*

$$\begin{aligned}
\forall\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}),\ < x\text{Pf}(x^\alpha), \varphi > &= -\int_0^\infty \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}(x\varphi'(x)+\varphi(x))\mathrm{d}x \\
&= -\int_0^\infty \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\varphi(x)\mathrm{d}x - \int_0^\infty \frac{x^{\alpha+2}}{\alpha+1}\varphi'(x)\mathrm{d}x \\
&= -\int_0^\infty \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}(x)\varphi(x)\mathrm{d}x + \int_0^\infty x^{\alpha+1}\frac{\alpha+2}{\alpha+1}\varphi(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^\infty x^{\alpha+1}\varphi(x)\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

où on a utilisé que $x^{\alpha+2}$ est dérivable et que l'on peut appliquer la formule d'intégration par parties sur $[\varepsilon, a]$.

Remarque. On ne peut pas définir un produit raisonnable entre deux distributions. Par exemple, une multiplication basique du type "$< TS, \varphi >=< T, \varphi > \cdot < S, \varphi >$" ne définie même pas une forme linéaire.

Une autre objection est que l'on ne peut pas donner sens au carré de la distribution de Dirac en 0. Par exemple, on considère la famille de fonctions $(\phi_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ définie par :

$$\forall\varepsilon > 0,\ \phi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon} \text{ si } |x| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{et} \quad \phi_\varepsilon(x) = 0 \text{ sinon.}$$

Soit alors $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. On a, en utilisant Taylor avec reste intégral à l'ordre 1,

$$\int_{\mathbb{R}}\phi_\varepsilon(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\varepsilon}\int_{-\varepsilon/2}^{\varepsilon/2}\varphi(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\varepsilon}(\varepsilon\varphi(0)+O(\varepsilon^2)) \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \varphi(0).$$

et ainsi on a bien que $(\phi_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ converge vers δ_0 dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Toutefois, on a aussi :

$$\int_{\mathbb{R}} \phi_\varepsilon^2(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\varepsilon^2}\int_{-\varepsilon/2}^{\varepsilon/2} \varphi(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\varepsilon^2}(\varepsilon\varphi(0) + O(\varepsilon^3))$$

qui diverge lorsque ε tend vers 0. Ainsi, $(\phi_\varepsilon^2)_{\varepsilon>0}$ ne converge pas dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

D'un point de vue plus abstrait, on ne peut pas définir un produit entre deux distributions qui soit commutatif et associatif. Si cela était le cas, on aurait par exemple : $\delta_0 \cdot \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right) = \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \delta_0$. D'où, en multipliant les deux membres par x, on aurait d'une part : $x(\delta_0 \cdot \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right)) = (x\delta_0) \cdot \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$. D'autre part, $x(\delta_0 \cdot \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right)) = x(\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \delta_0) = (x\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right)) \cdot \delta_0 = 1 \cdot \delta_0 = \delta_0$, d'où la contradiction.

Une définition d'un produit de deux distributions reste possible à condition d'utiliser la transformée de Fourier, ce qui conduit à la théorie des opérateurs pseudo-différentiels. Toutefois, sans aller jusque-là, nous verrons que l'on peut définir un produit de convolution entre deux distributions (moyennant des hypothèses sur leurs supports respectifs), ce produit ayant alors une interprétation physique naturelle.

5.2 Les équations $xT = 0$, $xT = 1$ et $xT = S$

Nous allons commencer par étudier ces trois équations pour $d = 1$. Nous donnerons ensuite un résultat plus général en dimension d quelconque pour le système d'équations $x_iT = 0$.

Proposition 5.2.1. *Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. On a alors équivalence entre*

1. $xT = 0$.
2. $T = C\delta_0$ *où* $C \in \mathbb{C}$.

Démonstration : On a déjà vu que, si $T = C\delta_0$, alors $xT = Cx\delta_0 = C \cdot 0 = 0$. D'où une première implication.

Pour l'autre sens, supposons que $xT = 0$. Pour $\theta \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $0 =< xT, \theta >=< T, x\theta >$. Donc T est nulle sur toutes les fonctions de la forme $x\theta$, $\theta \in C_0^\infty(\mathbb{R})$.

Caractérisons ces fonctions. Tout d'abord, si $\psi = x\theta$, $\theta \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, il est clair que $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ et que $\psi(0) = 0$. Réciproquement, soit $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\psi(0) = 0$. Supposons que supp $\psi \subset [-A, A]$. Par la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 1, on peut écrire que $\psi(x) = \psi(0) + x\int_0^1 \psi'(tx)\mathrm{d}t = x\theta(x)$ où $\theta(x) = \int_0^1 \psi'(tx)\mathrm{d}t$. Alors, $\theta \in C^\infty(\mathbb{R})$ et si $|x| > A$, on a $\psi'(x) = 0$ d'où $\theta(x) = 0$. Donc $\theta \in C_0^\infty(\mathbb{R})$.

Finalement, T s'annule sur toutes les fonctions $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ telles que $\psi(0) = 0$. Fixons $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\chi(x) = 1$ pour $|x| \leq 1$. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Posons $\psi = \varphi - \varphi(0)\chi$. Alors $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ et $\psi(0) = 0$. Donc $< T, \psi >= 0$, soit encore

$$< T, \varphi >= \varphi(0) < T, \chi >= C < \delta_0, \varphi > \quad \text{avec} \quad C =< T, \chi > .$$

D'où l'autre implication.

□

On peut alors étudier la même équation avec un second membre. On commence par regarder l'équation $xT = 1$.

Proposition 5.2.2. *Les distributions $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ telles que $xT = 1$ sont de la forme $T = \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right) + C\delta_0$, $C \in \mathbb{C}$.*

Démonstration : On a déjà vu en exemple que $x\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right) = 1$. Donc si T est une solution de l'équation $xT = 1$, on doit avoir $x(T - \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right)) = 0$. Par la proposition précédente, $T - \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right) = C\delta_0$ avec $C \in \mathbb{C}$.

□

On retrouve ici le principe général de résolution des équations linéaires : l'ensemble des solutions est un espace affine dirigé par le noyau de l'application linéaire qui définit l'équation considérée (soit l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée) et passant par une solution particulière de l'équation. Nous pouvons en fait résoudre l'équation $xT = S$ pour n'importe quel second membre $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Proposition 5.2.3. *Soit $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Alors l'équation $xT = S$ admet une solution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.*

Démonstration : Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ et soit $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\chi(x) = 1$ pour $|x| \leq 1$. Posons $\tilde{\varphi} = \varphi - \varphi(0)\chi$. Alors $\tilde{\varphi}(0) = 0$. Il existe donc $\theta \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\tilde{\varphi} = x\theta$. On définit la distribution T par : $< T, \varphi >=< S, \theta >$. Alors $< xT, \varphi >=< T, x\varphi >=< S, \varphi >$, d'où $xT = S$. En effet, $\widetilde{x\varphi} = x\varphi - (x\varphi)(0)\chi = x\varphi$ et dans ce cas, $\theta = \varphi$.

Il ne reste plus qu'à vérifier que la formule $< T, \varphi >=< S, \theta >$ définie bien une distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Tout d'abord, si $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, on a supp $\theta \subset$ supp $\varphi \cup$ supp χ, donc $\theta \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Puis, comme $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, $| < S, \theta > | \leq C_S p_m(\theta)$. Or, $\theta = \int_0^1 \varphi'(tx) - \varphi(0)\chi'(tx)\mathrm{d}t$, donc $p_m(\theta) \leq C p_{m+1}(\varphi)$. Ainsi, $| < T, \varphi > | \leq C_S \cdot C p_{m+1}(\varphi)$ et $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

□

Plus généralement, on peut prouver le résultat suivant.

Proposition 5.2.4. *Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ telle que : $\forall i \in \{1, \ldots d\},\ x_i T = 0$. Alors $T = C\delta_0$ avec $C \in \mathbb{C}$.*

Démonstration : La démonstration est la même que dans le cas $d = 1$ une fois prouvé le lemme d'Hadamard : supposons que $0 \in \Omega$ et soit $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ telle que $\psi(0) = 0$. Alors il existe des fonctions $\psi_1, \ldots, \psi_d \in C_0^\infty(\Omega)$ telles que : $\forall x \in \Omega,\ \psi(x) = \sum_{i=1}^d x_i \psi_i(x)$. Cela résulte d'un développement de Taylor à l'ordre 1 et d'un changement de variable.

□

5.3 Dérivation d'une distribution

Nous avons déjà vu dans le chapitre 2, lors de notre étude de l'exemple de la fonction de Heaviside, qu'il est possible de donner un sens à la dérivée d'une fonction qui n'est pas dérivable au sens classique. Nous allons maintenant voir, et c'est là l'un des concepts les plus étonnants de la théorie des distributions, que l'on peut dériver à n'importe quel ordre une distribution quelconque et que cette dérivation est une opération continue. La situation est donc totalement différente du cadre des fonctions dérivables classiques. Il faut se dire que si une fonction classique n'est pas dérivable, cela signifie simplement que sa dérivée est une distribution qui n'est pas une fonction. La dérivée usuelle peut laisser échapper l'essentiel de la "vraie" dérivée, par exemple une masse de Dirac dans le cas de la fonction de Heaviside.

Le tout est de trouver "la bonne formule" pour définir la "bonne" notion de dérivée des distributions. Pour cela, regardons ce qui se passe dans le cas des distributions associées à une fonction f de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Par intégration par parties (le crochet s'annulant pour des raisons de support) :

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}),\ < T_{f'}, \varphi >= \int_{\mathbb{R}} f'(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = -\int_{\operatorname{supp}\varphi} f(x)\varphi'(x)\mathrm{d}x = - < T_f, \varphi' > .$$

Bien entendu, notre définition générale de la dérivée d'une distribution doit coïncider avec la notion de dérivée classique dans le cas des fonctions de classe C^1, nous allons donc adopter la définition suivante.

Définition 5.3.1. *Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et soit $i \in \{1, \ldots, d\}$. La forme linéaire $\partial_{x_i} T$ définie sur $C_0^\infty(\Omega)$ par*

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega),\ < \partial_{x_i} T, \varphi >= - < T, \partial_{x_i}\varphi >$$

est une distribution sur Ω appelée i-ième dérivée partielle de T.

Le fait que $\partial_{x_i} T$ soit une distribution est évident. Il est clair aussi que si T est une distribution d'ordre m donné, alors $\partial_{x_i} T$ est d'ordre $m+1$.
La définition de $\partial_{x_i} T$ peut être itérée autant de fois que voulu, on peut donc définir, pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^d$, $\partial^\alpha T$ par

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega),\ < \partial^\alpha T, \varphi >= (-1)^{|\alpha|} < T, \partial^\alpha \varphi > .$$

La proposition suivante est tout à fait remarquable de simplicité lorsqu'on la compare aux énoncés équivalents dans le cadre des fonctions classiques qui requiert tous des hypothèses très fortes de convergence uniforme. En fait, le caractère uniforme est caché dans le théorème 4.3.6 basé sur le théorème d'uniformisation de Banach-Steinhaus.

Proposition 5.3.2. *Soit $(T_n)_{n\geq 0}$ une suite dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ qui converge vers $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Alors, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$, $(\partial^\alpha T_n)_{n\geq 0}$ converge vers $\partial^\alpha T$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.*

Démonstration : Soit $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$< \partial^\alpha T_n, \varphi >= (-1)^{|\alpha|} < T_n, \partial^\alpha \varphi > \xrightarrow[n\to\infty]{} (-1)^{|\alpha|} < T, \partial^\alpha \varphi >=< \partial^\alpha T, \varphi > .$$

D'où le résultat voulu.

□

La dérivation se comporte tout aussi bien vis-à-vis du produit par une fonction C^∞.

Proposition 5.3.3. *Soit $a \in C^\infty(\Omega)$ et soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Alors, $\partial_{x_i}(aT) = (\partial_{x_i} a)T + a\partial_{x_i} T$.*

Démonstration : Cela provient directement de la formule de Leibniz.

□

Exemple 5.3.4. *La dérivée d'une distribution T_f avec $f \in C^1(\mathbb{R})$ est la distribution $T_{f'}$. C'est l'objet du calcul fait au début de cette section.*

Exemple 5.3.5. *La i-ième dérivée partielle d'une distribution T_f avec $f \in C^1(\mathbb{R}^d)$ est la distribution $T_{\partial_{x_i} f}$. Cela résultera de la formule d'intégration par partie multidimensionnelle (voir Corollaire 11.4.4 au Chapitre 11).*

Exemple 5.3.6. *Soit H la fonction de Heaviside qui vaut 0 sur $]-\infty,0[$, $\frac{1}{2}$ en 0 et 1 sur $]0,+\infty[$. Alors, $H' = \delta_0$. En effet,*

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}),\ < H', \varphi >= - < H, \varphi' >= - \int_0^\infty \varphi'(x)\mathrm{d}x = \varphi(0) =< \delta_0, \varphi > .$$

Exemple 5.3.7. *La fonction définie pour $x \neq 0$ par $f(x) = \log|x|$ et une valeur quelconque en 0 est dans $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$. On peut donc lui associer une distribution $T_f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. On a alors : $(T_f)' = \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right)$.*

En effet, pour $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, on a $< f', \varphi >= - < f, \varphi' >= -\int_{\mathbb{R}} \log|x| \cdot \varphi'(x)\mathrm{d}x$. Or, par intégrabilité du logarithme en 0, on a

$$-\int_{\mathbb{R}} \log|x| \cdot \varphi'(x)\mathrm{d}x = -\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{|x|\geq\varepsilon} \log|x| \cdot \varphi'(x)\mathrm{d}x := -\lim_{\varepsilon\to 0} I_\varepsilon.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Alors,

$$I_\varepsilon = \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \log(-x) \cdot \varphi'(x)\mathrm{d}x + \int_\varepsilon^\infty \log(x) \cdot \varphi'(x)\mathrm{d}x.$$

On effectue une intégration par partie dans chacune des deux intégrales pour obtenir :

$$I_\varepsilon = -\int_{|x|\geq\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\mathrm{d}x + \varphi(-\varepsilon)\log(\varepsilon) - \varphi(\varepsilon)\log(\varepsilon).$$

Or, on peut écrire $\varphi(x) = \varphi(0) + x\psi(x)$ avec $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$. Donc $\varphi(-\varepsilon) - \varphi(\varepsilon) = -\varepsilon(\psi(-\varepsilon) + \psi(\varepsilon))$, d'où

$$I_\varepsilon = -\int_{|x|\geq\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\mathrm{d}x - \varepsilon\log(\varepsilon)(\psi(-\varepsilon) + \psi(\varepsilon)).$$

Comme $\varepsilon\log(\varepsilon) \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0$, on a finalement

$$< f', \varphi >= -\lim_{\varepsilon\to 0} I_\varepsilon = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{|x|\geq\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\mathrm{d}x = \left\langle \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right), \varphi \right\rangle.$$

D'où le résultat annoncé.

Exemple 5.3.8. *Soit $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ et posons, pour $x \in \mathbb{R}$, $v(x) = \int_0^x u(t)\mathrm{d}t$. Alors v est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et $v' = u$ au sens des distributions.*

Commençons par montrer la continuité de v. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite qui converge vers x_0. On a : $\forall n \geq 0$, $v(x_n) = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{(0,x_n)}(t)u(t)\mathrm{d}t$. Par le TCD, la suite $(v(x_n))_{n\geq 0}$ converge alors vers $\int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{(0,x_0)}(t)u(t)\mathrm{d}t = v(x_0)$, d'où la continuité de v en x_0, donc sur $\mathbb{R}$.

Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ et supposons que $\operatorname{supp}\varphi \subset [-A, A]$. En utilisant Fubini, on a :

$$\begin{aligned}
< v', \varphi > &= - < v, \varphi' >= -\int_{-A}^A \left(\int_0^x u(t)\mathrm{d}t\right) \varphi'(x)\mathrm{d}x \\
&= -\int_0^A \int_0^x u(t)\varphi'(x)\mathrm{d}t\mathrm{d}x + \int_{-A}^0 \int_x^0 u(t)\varphi'(x)\mathrm{d}t\mathrm{d}x \\
&= -\int_0^A u(t) \left(\int_t^A \varphi'(x)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t + \int_{-A}^0 u(t)\left(\int_{-A}^t \varphi'(x)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^A u(t)\varphi(t)\mathrm{d}t + \int_{-A}^0 u(t)\varphi(t)\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} u(t)\varphi(t)\mathrm{d}t =< u, \varphi > .
\end{aligned}$$

On a bien $v' = u$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Exemple 5.3.9. *La forme associée à la dérivée α-ième d'une mesure de Radon μ sur Ω, notée $\partial^\alpha \mu$, est l'application de $C_0^\infty(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$ donnée par :*

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega),\ < \partial^\alpha \mu, \varphi >= \int_\Omega (-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha \varphi(x) d\mu(x).$$

C'est une forme linéaire sur C_0^∞. Si $K \subset \Omega$ est compact, on a l'inégalité, due au fait que μ charge de manière finie les compacts :

$$\left| \int_\Omega (-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha \varphi(x) d\mu(x) \right| \leq \mu(K) \max_{x \in K} |\partial^\alpha \varphi(x)|.$$

En particulier, la notation $\partial^\alpha \mu$ provient du fait que, si μ est une mesure définie par une densité $\rho(x)$ qui est de classe C^k, alors $d\mu(x) = \rho(x) dx$ et on a, pour $|\alpha| \leq k$:

$$\int_\Omega (-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha \varphi(x) d\mu(x) = \int_\Omega (-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha \varphi(x) \rho(x) dx = \int_\Omega \partial^\alpha \rho(x) \varphi(x) dx,$$

et ainsi cette forme linéaire est associée à la mesure de densité $\partial^\alpha \rho$. Remarquons que nous avons à nouveau utilisé le Corollaire 11.4.4 du Chapitre 11.

5.4 Les équations $T' = 0$ et $\partial_{x_i} T = 0$.

Nous allons commencer par regarder ce qui se passe en dimension $d = 1$. Nous avons le résultat suivant :

Proposition 5.4.1. *Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. On a $T' = 0 \iff T$ est constante.*

Démonstration : Si on suppose que T est constante, il est alors évident que $T' = 0$ puisque φ est à support compact.

Réciproquement, supposons que $T' = 0$. Alors, si $\theta \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $< T', \theta >= - < T, \theta' >= 0$. Donc T s'annule sur toutes les fonctions $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ de la forme $\psi = \theta'$ où $\theta \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Caractérisons ces fonctions. On montre que

$$(\psi = \theta',\ \theta \in C_0^\infty(\mathbb{R})) \Leftrightarrow \left(\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}) \ \text{ et } \ \int_\mathbb{R} \psi(x) \mathrm{d}x = 0 \right).$$

Le sens direct est évident puisque θ est à support compact. Réciproquement, on pose : $\theta(x) = \int_{-\infty}^x \psi(t) \mathrm{d}t$ avec supp $\psi \subset [-M, M]$. Il est clair que $\theta \in C^\infty(\mathbb{R})$. Si $x < -M$, alors $\theta(x) = 0$ (car ψ est nulle sur $]-\infty, x]$ dans ce cas). Si $x > M$, alors $\int_x^{+\infty} \psi(t) \mathrm{d}t = \int_\mathbb{R} \psi(t) \mathrm{d}t = 0$ par hypothèse. D'où,

$$\forall x > M,\ \theta(x) = \int_{-\infty}^x \psi(t) \mathrm{d}t + 0 = \int_{-\infty}^x \psi(t) \mathrm{d}t + \int_x^{+\infty} \psi(t) \mathrm{d}t = \int_\mathbb{R} \psi(t) \mathrm{d}t = 0,$$

donc supp $\theta \subset [-M, M]$ et $\theta \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Et bien entendu, on $\psi = \theta'$.

Nous allons utiliser cette équivalence. Soit $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ avec $\int_\mathbb{R} \chi(x) \mathrm{d}x = 1$. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Posons :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \psi(x) = \varphi(x) - \left(\int_\mathbb{R} \varphi(t) \mathrm{d}t \right) \chi(x).$$

Alors $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ et $\int_\mathbb{R} \psi(t) \mathrm{d}t = 0$. Par conséquent, il existe $\theta \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\psi = \theta'$ et $< T, \psi >= 0$. Alors, par linéarité de T,

$$< T, \varphi >=< T, \chi > \cdot \int_\mathbb{R} \varphi(x) \mathrm{d}x = C < 1, \varphi >=< C, \varphi >, \text{ avec } C =< T, \chi > \in \mathbb{C}.$$

Donc T est constante.

□

Le résultat persiste en dimension supérieure, mais sa démonstration est plus difficile. Nous allons admettre un résultat plus général dont on déduira le résultat voulu immédiatement (pour une démonstration d'une forme un peu plus faible de ce résultat, voir [6, Corollaire 2.19, p52]).

Théorème 5.4.2 (Admis)**.** *Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. On suppose qu'il existe $f_1, \dots f_d$ des fonctions continues sur Ω telles que, pour tout $i \in \{1, \dots, d\}$, $\partial_{x_i} T = f_i$. Alors il existe f de classe C^1 sur Ω telle que $T = f$.*

Corollaire 5.4.3. *Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et supposons que l'ouvert Ω est connexe. Supposons que, pour tout $i \in \{1, \dots, d\}$, $\partial_{x_i} T = 0$. Alors T est constante.*

Démonstration : Il suffit d'appliquer le théorème précédent puis le résultat classique sur les fonctions de classe C^1 de dérivées nulles sur un ouvert connexe (résultat basé sur les accroissements finis).

□

5.5 Formule des sauts en dimension 1

On se donne une fonction f, qui est de classe C^1 par morceaux dans $[a, b]$, et qui admet, en tout point où elle n'est pas continue, une limite à droite et une limite à gauche. Il existe ainsi une subdivision de $[a, b]$ en intervalles $[a, a_1[$, $]a_i, a_{i+1}[$, $]a_{i+1}, b]$ telle que f soit de classe C^1 sur $]a_i, a_{i+1}[$. On note $f(a_i^+)$ et $f(a_i^-)$ les limites respectives à droite et à gauche au point a_i. Par convention, les points intérieurs à $[a, b]$ sont $a_1, .., a_n$ et on note $a_0 = a, a_{n+1} = b$. La fonction f définit une distribution, dont on calcule la dérivée, que nous notons $(T_f)'$. Par définition, pour $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$,

$$< (T_f)', \varphi >= - < T_f, \varphi'(x) >= - \int_a^b f(x)\varphi'(x)dx$$

Ainsi

$$\int_a^b f(x)\varphi'(x)dx = \sum_{i=0}^{n} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x)\varphi'(x)dx.$$

Comme $\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x)\varphi'(x)dx = \varphi(a_{i+1})f(a_{i+1}^-) - \varphi(a_i)f(a_i^+) - \int_{a_i}^{a_{i+1}} f'(x)\varphi(x)dx$, où la fonction f' est définie presque partout, on a la relation

$$-\int_a^b f(x)\varphi'(x)dx = \sum_{i=0}^{n} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f'(x)\varphi(x)dx + \sum_{i=0}^{n} f(a_i^+)\varphi(a_i) - f(a_{i+1}^-)\varphi(a_{i+1}).$$

Soit, en notant $T_{f'}$ la distribution définie par f' sur chaque intervalle $]a_i, a_{i+1}[$,

$$< (T_f)', \varphi >=< T_{f'}, \varphi > +(f(a^+) - 0) < \delta_a, \varphi > +(0 - f(b^-)) < \delta_b, \varphi > + \sum_{i=1}^{n} (f(a_i^+) - f(a_i^-)) < \delta_{a_i}, \varphi > .$$

On a ainsi démontré le théorème suivant.

Théorème 5.5.1. *La distribution $(T_f)'$ est donnée, à partir de $T_{f'}$ et des sauts de f en chaque a_i, par*

$$(T_f)' = T_{f'} + \sum_{i=0}^{n+1} (f(a_i^+) - f(a_i^-))\delta_{a_i}.$$

avec les conventions $a_0 = a, a_{n+1} = b$, $f(a_0^-) = 0$, $f(a_{n+1}^+) = 0$.

Ce résultat s'étend aux dérivées successives, comme pour la dérivée seconde, en considérant les sauts de f et ceux de sa dérivée :

$$(T_f)'' = T_{f''} + \sum_{i=0}^{n+1} (f(a_i^+) - f(a_i^-))\delta'_{a_i} + \sum_{i=0}^{n+1} (f'(a_i^+) - f'(a_i^-))\delta_{a_i}.$$

On en déduit aussi la proposition :

Proposition 5.5.2. *Soit u une fonction C^1 définie sur un intervalle $[a, b]$. On la prolonge par 0 à l'extérieur de $[a, b]$ et on note ce prolongement $\underline{u}$. De même, on note $\underline{u}'$ le prolongement de la fonction u', définie par u' sur $]a, b[$ et par 0 à l'extérieur. Alors*

$$(T_{\underline{u}})' = T_{\underline{u}'} + u(a)\delta_a - u(b)\delta_b.$$

Cette proposition est le cas particulier où la fonction u est de classe C^1 par morceaux d'un résultat plus général :

Proposition 5.5.3. *Soit $g \in C^0(I)$, telle que sa dérivée au sens des distributions g' vérifie $g' \in L^1_{loc}(I)$, $a, b \in I$. Alors,*

$$(T_{g1_{[a,b]}})' = T_{g'1_{[a,b]}} + g(a)\delta_a - g(b)\delta_b.$$

Nous avons ainsi trouvé la dérivée d'un prolongement par 0 en dimension 1.

Chapitre 6

Convolution des distributions I

Dans ce premier chapitre d'introduction à la notion de produit de convolution de deux distributions, nous allons le définir non pas par une formule générale, mais par une première formule dans le cas le plus simple puis par les propriétés qu'il doit vérifier. Nous reviendrons sur la construction théorique du produit de convolution dans la partie avancée de ce cours, au chapitre 9. Dans tout ce premier chapitre, nous admettrons les résultats que nous démontrerons au chapitre 9 lorsque nous aurons le cadre adéquat pour le faire.

6.1 Produit de convolution de deux distributions

Nous avons déjà défini le produit de convolution de deux fonctions dans $L^1(\mathbb{R}^d)$. Regardons le cas particulier du produit de convolution d'une fonction intégrable par une fonction dans $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$.
Soient $u \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$,

$$(u \star \varphi)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} u(y)\varphi(x-y)\mathrm{d}y = (u \mid \varphi(x-\cdot))$$

où $(\cdot|\cdot)$ désigne le produit scalaire dans $L^2(\mathbb{R}^d)$. Par analogie, nous allons poser comme définition la formule suivante pour le produit de convolution d'une distribution par une fonction test.

Définition 6.1.1. *Soient $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ et $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. Leur produit de convolution est la fonction définie en chaque point par*

$$\forall x \in \mathbb{R}^d,\ (T \star \varphi)(x) =< T, \varphi(x-\cdot) > .$$

Alors $T \star \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$.

Le fait que la fonction $T \star \varphi$ est bien de classe C^∞ est une conséquence immédiate du théorème de dérivation sous le crochet (voir Proposition 9.1.1) que nous verrons au chapitre 9. Par ailleurs, ce même résultat de dérivation sous le crochet nous donne le fait que la dérivation se comporte très bien par rapport au produit de convolution.

Proposition 6.1.2. *Soient $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ et $\alpha \in \mathbb{N}^d$. Alors*

$$\partial^\alpha(T \star \varphi) = (\partial^\alpha T) \star \varphi = T \star (\partial^\alpha \varphi).$$

Plus généralement, pour toute décomposition du multi-indice $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$, on a

$$\partial^\alpha(T \star \varphi) = (\partial^{\alpha_1} T) \star (\partial^{\alpha_2} \varphi).$$

De la définition "ponctuelle" de la convolution entre une distribution et une fonction test que nous avons donné, il en résulte une fonction dans $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. Or, à cette fonction est toujours associée de manière unique une distribution puisqu'elle est en particulier dans $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$. Voyons comment agit cette distribution associée sur les fonctions tests. Pour cela on introduit tout d'abord une notation.

A toute fonction f, on associe la fonction $\check{f} : x \mapsto f(-x)$. On remarque que, si $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, on a

$$< T, \varphi >= (T \star \check{\varphi})(0).$$

Proposition 6.1.3. *Soient $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ et $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. Alors,*

$$(T \star \varphi) \star \psi = T \star (\varphi \star \psi) \quad \text{et} \quad < T \star \varphi, \psi >=< T, \check{\varphi} \star \psi > .$$

Cette proposition découle de la Proposition 9.1.2. Nous énonçons à présent une autre propriété essentielle du produit de convolution : celui-ci est continu. Ce sera une conséquence des propriétés plus générales de continuité du produit de convolution de deux distributions.

Proposition 6.1.4.
1. *Soit $(T_n)_{n\geq 0}$ une suite qui converge vers T dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ et soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. Alors $(T_n \star \varphi)_{n\geq 0}$ converge vers $T \star \varphi$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$.*
2. *Soit $(\varphi_n)_{n\geq 0}$ une suite qui converge vers φ dans $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ et soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$. Alors $(T \star \varphi_n)_{n\geq 0}$ converge vers $T \star \varphi$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$.*

On peut maintenant se demander comment définir le produit de convolution de deux distributions. Pour cela nous allons utiliser un résultat de densité qui sera démontré par troncature et régularisation au Théorème 9.4.1. Enonçons ce résultat sous une première forme simple.

Théorème 6.1.5. *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Il existe alors une suite $(\varphi_n)_{n\geq 0}$ de fonctions dans $C_0^\infty(\Omega)$ qui converge vers T au sens des distributions.*

On peut alors définir le produit de convolution de deux distributions, en rajoutant une hypothèse sur les supports de ces distributions que nous détaillerons au chapitre 9, après avoir vu la notion de support d'une distribution au chapitre 8.

Soient $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $S \in \mathcal{D}'(\Omega)$ à support compact. On approche T par des fonctions φ_n dans $C_0^\infty(\Omega)$. Alors, pour toute $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, la suite $(< \varphi_n \star S, \psi >)_{n\geq 0}$ converge, donc $(\varphi_n \star S)_{n\geq 0}$ possède une limite dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. Cette limite est notée $T \star S$ et on a, par continuité du produit de convolution, la convergence de $(\varphi_n \star S)_{n\geq 0}$ vers $T \star S$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. Tout cela sera justifié proprement au chapitre 9, mais l'idée de la construction reste valide. Nous allons, dans la prochaine section, énoncer les principales propriétés du produit de convolution.

6.2 Propriétés de la convolution

Commençons par donner les propriétés algébriques de base du produit de convolution.

Proposition 6.2.1. *Soient $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, $S, U \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ à supports compacts. On a*
1. *Associativité : $T \star (S \star U) = (T \star S) \star U$.*
2. *Commutativité : $T \star S = S \star T$.*
3. *Élément neutre : $T \star \delta_0 = \delta_0 \star T = T$.*

La dérivation se comporte encore très bien par rapport au produit de convolution de deux distributions.

Proposition 6.2.2. *Soient $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ à support compact et $\alpha \in \mathbb{N}^d$. Alors*

$$\partial^\alpha (T \star S) = (\partial^\alpha T) \star S = T \star (\partial^\alpha S).$$

En particulier, $(\partial^\alpha \delta_0) \star T = \partial^\alpha T$.

Enfin, la propriété de continuité du produit de convolution est préservée.

6.3 Interprétation physique de la convolution.

Considérons un système physique, que nous nous représenterons comme une “boîte noire”, qui, lorsqu'on l'excite avec un signal $s(t)$ produit une réponse $r(t)$. On fait les hypothèses physiques suivantes :

— Le principe de superposition : si r_1 et r_2 sont les réponses aux signaux s_1 et s_2, alors la réponse au signal $\lambda_1 s_1 + \lambda_2 s_2$ est $\lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2$ pour tous réels λ_1 et λ_2.

— L'homogénéité dans le temps : la réponse au signal s décalé de T secondes est la réponse r décalée de T secondes.

— Une certaine stabilité : des signaux très voisins ne produisent pas des réponses très différentes.

Alors, si on considère l'application de $C_0^\infty(\mathbb{R})$ dans $C^\infty(\mathbb{R})$ qui à s associe r, nos hypothèses physiques s'interprètent comme le fait que cette application est linéaire, qu'elle commute avec les translations et qu'elle est continue en un certain sens. Sous ces hypothèses, on peut montrer qu'il existe une distribution T sur $\mathbb{R}$ telle que $r = T \star s$. Ce résultat étant très général, il explique en partie le fait que la convolution intervienne très souvent en physique. Nous en donnerons un énoncé précis au chapitre 9.

6.4 Comment calculer un produit de convolution

Nous avons vu la définition d'un produit de convolution et les différentes propriétés de ce produit de convolution. Nous allons maintenant voir comment en pratique on peut calculer le produit de convolution de deux distributions suivant les situations.

6.4.1 Convolution de deux fonctions dans $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$

Si f et g sont deux fonctions dans $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$, alors on a $T_f \star T_g = T_{f \star g}$ avec

$$\forall x \in \mathbb{R}^d,\ (f \star g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y) g(y) \mathrm{d}y.$$

6.4.2 Convolution d'une distribution et d'une fonction dans $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$

Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ et soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. Alors la distribution $T \star \varphi$ est donnée par la fonction de classe C^∞, $x \mapsto < T, \varphi(x - \cdot) >$.

6.4.3 Utilisation des propriétés de la convolution

On peut par exemple utiliser l'approximation d'une des deux distributions par des fonctions de classe C_0^∞ et se ramener pour chaque terme de la suite au cas précédent. Parfois la suite approchante est suffisamment explicite pour permettre cette approche. On passe ensuite à la limite pour trouver la convolution des deux distributions.

On peut aussi utiliser les propriétés de dérivation de la convolution. Par exemple en dimension $d = 1$, si T est la dérivée de $\tilde{T}$, il peut être plus simple de calculer d'abord $\tilde{T} \star S$ et d'utiliser ensuite le fait que $T \star S = (\tilde{T} \star S)'$. Si au contraire il est plus simple de calculer $T' \star S$, on commence par faire ce calcul et alors on peut retrouver $T \star S$ à une constante près (par primitivation).

Exemple 6.4.1. *On veut calculer $\delta_0' \star \delta_0'$. On part de $\delta_0 \star \delta_0 = \delta_0$ et on dérive deux fois en faisant porter la dérivation une fois sur chaque terme pour obtenir que $\delta_0' \star \delta_0' = \delta_0''$.*

Chapitre 7

Solutions élémentaires d'EDPs I

7.1 Théorèmes d'existence

7.1.1 Définitions et premières propriétés

Soit $P \in \mathbb{C}[X_1, \dots X_d]$ un polynôme à d variables. Dans la base canonique de $\mathbb{C}[X_1, \dots X_d]$, P se décompose sous la forme :

$$P = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha X^\alpha, \quad \text{avec } a_\alpha \in \mathbb{C} \quad \text{et} \quad X^\alpha = X_1^{\alpha_1} \cdots X_d^{\alpha_d}.$$

L'entier m est appelé le degré de P.

Définition 7.1.1. *On appelle opérateur différentiel à coefficients constants sur $\mathcal{D}'(\Omega)$ associé à $P \in \mathbb{C}[X_1, \dots X_d]$, l'application linéaire notée $P(\partial)$ et définie par :*

$$P(\partial) : \begin{array}{ccc} \mathcal{D}'(\Omega) & \to & \mathcal{D}'(\Omega) \\ T & \mapsto & P(\partial)T = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \partial^\alpha T \end{array}$$

Définition 7.1.2. *On appelle équation aux dérivées partielles (EDP en abrégé) linéaire à coefficients constants, toute équation de la forme $P(\partial)T = F$ où $P(\partial)$ est un opérateur différentiel sur $\mathcal{D}'(\Omega)$, $F \in \mathcal{D}'(\Omega)$ est donnée et $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ est l'inconnue. Le degré m du polynôme P est appelé l'ordre de l'EDP.*

Exemple 7.1.3. *Nous donnons une liste d'équations aux dérivées partielles d'ordre 2 à coefficients constants.*

1. *L'équation de Laplace (ou de Poisson) de l'électrostatique : $\Delta T = F$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ associée au polynôme $P = X_1^2 + \cdots X_d^2$.*
2. *L'équation des ondes : $\partial_{tt}^2 T - \Delta T = F$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{1+d})$ pour $P = X_0^2 - X_1^2 - \cdots - X_d^2$.*
3. *L'équation de la chaleur : $\partial_t T - \Delta T = F$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{1+d})$ pour $P = X_0 - X_1^2 - \cdots - X_d^2$.*
4. *L'équation de Schrödinger : $\mathrm{i}\partial_t T - \Delta T = F$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{1+d})$ pour $P = \mathrm{i}X_0 - X_1^2 - \cdots - X_d^2$.*

Vocabulaire. La distribution F est appelée second membre de l'EDP. Lorsque $F = 0$, on dit que l'EDP est homogène. Enfin, l'équation $P(\partial)T = 0$ est appelée équation homogène associée à $P(\partial)T = F$.

Proposition 7.1.4. *L'ensemble des solutions de l'équation aux dérivées partielles linéaire à coefficients constants $P(\partial)T = F$ est soit l'ensemble vide, soit le sous-espace affine de $\mathcal{D}'(\Omega)$, $T_0 + \mathrm{Ker}\ P(\partial)$ où T_0 est une solution particulière de $P(\partial)T = F$.*

Démonstration : En effet, il s'agit du résultat général valable pour toute équation linéaire de la forme $u(x) = y$ où u est une application linéaire d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F. On remarque que Ker $P(\partial)$ n'est autre que l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée à $P(\partial)T = F$. Compte tenu du théorème de Malgrange-Ehrenpreis énoncé plus loin, le cas où l'ensemble des solutions est vide ne peut se produire que lorsque $P = 0$ et $F \neq 0$.

□

Ce résultat nous amène à savoir d'une part résoudre l'équation homogène $P(\partial)T = 0$, d'autre part à trouver une solution particulière de $P(\partial)T = F$. Le fait que l'on travaille dans le cadre des distributions, où l'on dispose d'un produit de convolution possédant un élément neutre, nous permet de simplifier la recherche d'une solution particulière de $P(\partial)T = F$. Pour cela on utilise la notion de solution élémentaire.

Définition 7.1.5. *Soit $P \in \mathbb{C}[X_1, \dots X_d]$. On dit qu'une distribution $E \in \mathcal{D}'(\Omega)$ est une solution élémentaire de $P(\partial)$ lorsque $P(\partial)E = \delta_0$.*

On parle aussi de "solution fondamentale de $P(\partial)$", ou de "fonction de Green de $P(\partial)$".

On remarque que si E est une solution élémentaire de $P(\partial)$, on obtient toutes les autres en ajoutant à E une solution quelconque T de l'équation homogène $P(\partial)T = 0$.

7.1.2 Existence de solutions

Nous commençons pas énoncer un théorème général d'existence de solutions élémentaires.

Théorème 7.1.6 (Malgrange-Ehrenpreis (1955))**.** *Tout opérateur aux dérivée partielles à coefficients constants non nul admet une solution élémentaire.*

Démonstration : Ce théorème difficile est admis. Pour une démonstration, on renvoie à [3, Theorem 7.3.10, p189] ou [5, Theorem IX.23, p48]. Dans les deux cas, les démonstrations reposent sur des propriétés de la tranformée de Fourier et sur les propriétés des fonctions holomorphes.

□

Remarque. On peut prouver que si le degré de l'EDP est au moins égal à 1, alors la solution élémentaire ne peut être à support compact.

Soit $P(\partial)$ un opérateur différentiel à coefficients constants. Par le théorème de Malgrange-Ehrenpreis, nous savons qu'il possède une solution élémentaire. Voyons comment construire alors une solution particulière de $P(\partial)T = F$.

Proposition 7.1.7. *Soit E une solution élémentaire de $P(\partial)$.*

1. *Pour toute $F \in \mathcal{D}'(\Omega)$ à support compact, il existe au moins une solution de $P(\partial)T = F$ appartenant à $\mathcal{D}'(\Omega)$ et $T = E \star F$ en est une.*
2. *Pour toute $F \in \mathcal{D}'(\Omega)$ à support compact, il existe au plus une solution de $P(\partial)T = F$ appartenant à $\mathcal{D}'(\Omega)$ et à support compact et, s'il en existe une, c'est $E \star F$.*

Démonstration : En effet, d'après les propriétés du produit de convolution, on peut écrire :

$$P(\partial)(E \star F) = (P(\partial)E) \star F = \delta_0 \star F = F.$$

Cela démontre le premier point. Si on suppose ensuite que T est une solution à support compact, on a :

$$T = \delta_0 \star T = (P(\partial)E) \star T = P(\partial)(E \star T) = E \star (P(\partial)T) = E \star F,$$

d'où la seconde assertion.

□

7.2 Théorème de régularité

Nous allons maintenant énoncer un théorème de régularité des solutions d'une EDP à coefficients constants.

Théorème 7.2.1. *Soit $P \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_d]$. Si $P(\partial)$ possède une solution élémentaire dans $C^\infty(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$ alors, pour tout ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ et pour toute $f \in C^\infty(\Omega)$, si $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ est une solution de $P(\partial)T = T_f$, il existe $u \in C^\infty(\Omega)$ telle que $T = T_u$.*

Démonstration : Ce théorème sera démontré au chapitre 10, au théorème 10.2.1.

□

7.3 Exemples de solutions élémentaires

7.3.1 Problème du laplacien

Le laplacien sur $\mathbb{R}^d$, $\Delta = \sum_{i=1}^d \partial^2_{x_i x_i}$ a pour solution élémentaire, $E = xH$ lorsque $d = 1$, $E = \frac{1}{2\pi} \ln(|x|)$ lorsque $d = 2$ et

$$E = -\frac{1}{(d-2)S_{d-1}} \cdot \frac{1}{|x|^{d-2}},$$

où S_{d-1} désigne l'aire de la sphère unité $\mathbb{S}^{d-1}$ de $\mathbb{R}^d$, lorsque $d \geq 3$. Ces trois fonctions sont C^∞ sur $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ donc toute solution de $\Delta u = f$ avec $f \in C^\infty$ est de classe C^∞. Il en résulte par exemple que les distributions harmoniques (*i.e.* les $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ telles que $\Delta T = 0$) sont des fonctions C^∞.

Soit $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ une fonction radiale. Il existe alors $f : \mathbb{R}+ \ to \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, $F(x) = f(|x|)$. On remarque que le Laplacien en coordonnées sphériques pour une fonction radiale est égal à

$$\Delta F = \frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{d-1}{r}\frac{df}{dr}.$$

Ainsi, pour $d = 2$, on vérifie, que, hors de 0,

$$\frac{d \log r}{dr} = \frac{1}{r} \text{ et } \frac{d^2}{dr^2}(\log r) = -\frac{1}{r^2},$$

et, pour $d \geq 3$,

$$\frac{d}{dr}(\frac{1}{r^{d-2}}) = -\frac{d-2}{r^{d-1}} \text{ et } \frac{d^2}{dr^2}(\frac{1}{r^{d-2}}) = +\frac{(d-1)(d-2)}{r^d}.$$

Ainsi l'équation est vérifiée sur $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ pour $d \geq 2$. La fonction $x \mapsto \frac{1}{|x|^{d-2}}$ est dans $L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$, donc définit une distribution d'ordre 0.

On définit, pour $d \geq 3$, la fonction ρ_ε égale à $\frac{1}{\varepsilon^{d-2}}$ pour $0 \leq r \leq \varepsilon$, et égale à r^{-d+2} pour $r \geq \varepsilon$. Cette fonction est continue et $\frac{d\rho_\varepsilon}{dr} = -(d-2)r^{-d+1}$ pour $r > \varepsilon$ et est nulle pour $r < \varepsilon$. On considère alors la fonction radiale $R_\varepsilon : x \mapsto \rho_\varepsilon(|x|)$. On applique la formule des sauts, pour obtenir (utilisant la nullité de $\Delta\frac{1}{r^{d-2}}$ pour $r \neq 0$ et la continuité de ρ_ε en ε)

$$\begin{aligned} \Delta R_\varepsilon &= \frac{d^2\rho_\varepsilon}{dr^2} + \frac{d-1}{r}\frac{d\rho_\varepsilon}{dr} \\ &= \Delta\frac{1}{r^{d-2}} + (\rho_\varepsilon(\varepsilon^+) - \rho_\varepsilon(\varepsilon^-))\delta'_{r=\varepsilon} + \left(\frac{d\rho_\varepsilon}{dr}(\varepsilon^+) - \frac{d\rho_\varepsilon}{dr}(\varepsilon^-)\right)\delta_{r=\varepsilon} \\ &= -(d-2)\varepsilon^{-d+1}\delta_{r=\varepsilon}. \end{aligned} \tag{7.1}$$

Par passage en coordonnées sphériques, on trouve

$$\begin{aligned} < \Delta R_\varepsilon, \varphi > &= \int_0^\infty \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \left(\frac{d^2\rho_\varepsilon}{dr^2}(r) + \frac{d-1}{r}\frac{d\rho_\varepsilon}{dr}(r)\right)\varphi(r,\omega)r^{d-1}\mathrm{d}r\mathrm{d}\sigma \\ &= \int_0^\infty \left(\frac{d^2\rho_\varepsilon}{dr^2}(r) + \frac{d-1}{r}\frac{d\rho_\varepsilon}{dr}(r)\right) r^{d-1}\left(\int_{\mathbb{S}^{d-1}}\varphi(r,\omega)\mathrm{d}\sigma\right)\mathrm{d}r \\ &= < \Delta R_\varepsilon, r^{d-1}\left(\int_{\mathbb{S}^{d-1}}\varphi(r,\omega)\mathrm{d}\sigma\right) > \end{aligned}$$

La relation (7.1) entraine que

$$\begin{aligned} < \Delta R_\varepsilon, \varphi > &= < \Delta R_\varepsilon, r^{d-1}\int_{\mathbb{S}^{d-1}}\varphi(r,\omega)\mathrm{d}\sigma > \\ &= < -(d-2)\varepsilon^{-d+1}\delta_{r=\varepsilon}, r^{d-1}\int_{\mathbb{S}^{d-1}}\varphi(r,\omega)\mathrm{d}\sigma > \\ &= -(d-2)\varepsilon^{-d+1}\varepsilon^{d-1}\int_{\mathbb{S}^{d-1}}\varphi(\varepsilon,\omega)\mathrm{d}\sigma. \end{aligned}$$

Par le TCD, on vérifie que la dernière intégrale tend vers $\varphi(0)\int_{\mathbb{S}^{d-1}}\mathrm{d}\sigma = S_{d-1}\varphi(0)$.

Nous avons donc, au sens des distributions,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\Delta R_\varepsilon = -(d-2)S_{d-1}\delta_0.$$

Ainsi

$$\Delta\left(-\frac{1}{(d-2)S_{d-1}|x|^{d-2}}\right) = \delta_0.$$

Le cas de $d = 2$ se traite en considérant, de même, la fonction $\tilde{\rho}_\varepsilon$ égale à $\log r$ pour $r \geq \varepsilon$ et à $\log\varepsilon$ pour $0 \leq r \leq \varepsilon$. Ainsi

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\tilde{\rho}_\varepsilon}{dr}\right) = (1-0)\delta_{r=\varepsilon},$$

ce qui permet d'écrire

$$\left\langle \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\tilde{\rho}_\varepsilon}{dr}\right), \varphi\right\rangle = \int_0^{2\pi}\varepsilon\times\frac{1}{\varepsilon}\varphi(\varepsilon\theta)d\theta \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 2\pi\varphi(0).$$

On a ainsi $\Delta(\frac{1}{2\pi}\log|x|) = \delta_0$.

Enfin, par la dérivation usuelle des distributions :

$$(xH)'' = (H + xH')' = (H + x\delta_0)' = H' = \delta_0.$$

7.3.2 L'équation des ondes en dimension 1

On considère l'opérateur des ondes en $1D$, $P(\partial) = \partial^2_{tt} - \partial^2_{xx}$, associé au polynôme $P = X_1^2 - X_2^2$.

Soit la distribution de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ donnée par la fonction intégrable :

$$\forall (t,x) \in \mathbb{R}^2,\ E(x,t) = \left\{ \begin{array}{lll} \frac{1}{2} & \text{si} & t - |x| > 0 \\ 0 & \text{si} & t - |x| \leq 0 \end{array} \right. .$$

Alors, E est une solution élémentaire de l'opérateur des ondes.

En effet, soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ et soit $A > 0$ tel que supp $\varphi \subset [-A, A]^2$. On a, en utilisant Fubini,

$$\begin{aligned}
< (\partial^2_{tt} - \partial^2_{xx})E, \varphi > &= < E, (\partial^2_{tt} - \partial^2_{xx})\varphi > \\
&= \frac{1}{2}\left[\int_0^A \int_x^A \partial^2_{tt}\varphi(x,t)\mathrm{d}t\mathrm{d}x + \int_{-A}^0 \int_{-x}^A \partial^2_{tt}\varphi(x,t)\mathrm{d}t\mathrm{d}x - \int_0^A \int_{-t}^t \partial^2_{xx}\varphi(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\int_0^A -\partial_t\varphi(x,x)\mathrm{d}x + \int_{-A}^0 -\partial_t\varphi(x,-x)\mathrm{d}x - \int_0^A \partial_x\varphi(t,t) - \partial_x\varphi(-t,t)\mathrm{d}t\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[-\int_0^A \partial_t\varphi(u,u)\mathrm{d}u - \int_0^A \partial_x\varphi(u,u)\mathrm{d}u - \int_0^A \partial_t\varphi(-u,u)\mathrm{d}u + \int_0^A \partial_x\varphi(-u,u)\mathrm{d}u\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[-\int_0^A \phi_1'(u)\mathrm{d}u - \int_0^A \phi_2'(u)\mathrm{d}u\right] \ \text{avec} \ \phi_1(u) = \varphi(u,u) \ \text{et} \ \phi_2(u) = \varphi(-u,u) \\
&= \frac{1}{2}\left[\phi_1(0) + \phi_2(0)\right] = \varphi(0,0) =< \delta_{(0,0)}, \varphi > .
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$(\partial^2_{tt} - \partial^2_{xx})E = \delta_{(0,0)}.$$

De là, si $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ est à support compact, une solution de l'équation des ondes

$$\partial^2_{tt}u - \partial^2_{xx}u = f$$

est donnée par $u = E \star f$.

Deuxième partie

Notions avancées

Chapitre 8

Support d'une distribution

Dans tout le chapitre, Ω désigne un ouvert de $\mathbb{R}^d$.

8.1 Partitions de l'unité

Nous commençons par donner un lemme technique qui nous sera très utile par la suite, il s'agit du lemme des partitions de l'unité. Ce lemme est un outil permettant de passer du local au global.

Lemme 8.1.1. *Soit K un compact, $K \subset \Omega$ et $K \subset \bigcup_{j=1}^{p} \Omega_j$ avec $(\Omega_j)_{1\leq j\leq p}$ une famille finie d'ouverts inclus dans Ω. Alors, il existe des fonctions $(\chi_j)_{1\leq j\leq p}$ dans $C_0^\infty(\Omega)$ telles que :*

$$\forall j \in \{1,\dots,p\},\ 0 \leq \chi_j \leq 1, \quad \mathrm{supp}\ (\chi_j) \subset \Omega_j, \quad et \quad \forall x \in K,\ \sum_{j=1}^{p} \chi_j(x) = 1.$$

Démonstration : Tout d'abord, si S est un compact inclus dans un ouvert U de $\mathbb{R}^d$, alors il existe un ouvert V, $S \subset V$ tel que $\overline{V} \subset U$ avec $\overline{V}$ compact. En effet, il suffit de construire $V = \{x \in U \mid d(x,S) < \delta/2\}$ où $\delta = \min_{x\in S} d(x,U^c)$.

Soit $S_1 = K \setminus (\Omega_2 \cup \ldots \cup \Omega_p)$. Alors, S_1 est fermé et borné donc compact. De plus, $S_1 \subset \Omega_1$. Donc il existe un ouvert V_1 d'adhérence compacte tel que $S_1 \subset V_1$ et $\overline{V_1} \subset \Omega_1$. Alors, $K \subset S_1 \cup \Omega_2 \cup \ldots \Omega_p$ d'où $K \subset V_1 \cup \Omega_2 \cup \ldots \Omega_p$. Puis, on pose $S_2 = K \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_3 \cup \ldots \cup \Omega_p) \subset \Omega_2$ et on construit de même V_2 un voisinage ouvert d'adhérence compacte de S_2 tel que $\overline{V_2} \subset \Omega_2$. Alors, $K \subset \Omega_1 \cup V_2 \cup \Omega_3 \cup \ldots \cup \Omega_p$, d'où par intersection, $K \subset V_1 \cup V_2 \cup \Omega_3 \cup \ldots \cup \Omega_p$. On construit donc par récurrence une suite d'ouverts $V_1, \ldots V_p$ d'adhérences compactes tels que pour tout j, $K \subset V_1 \cup \ldots \cup V_j \cup \Omega_{j+1} \cup \ldots \cup \Omega_p$.

Pour tout $j \in \{1,\ldots,p\}$, soit $\tilde{\chi}_j \in C_0^\infty(\Omega)$ telle que supp $\tilde{\chi}_j \subset \Omega_j$, $\tilde{\chi}_j = 1$ sur $\overline{V_j}$ et $0 \leq \tilde{\chi}_j \leq 1$. On pose enfin $\chi_1 = \tilde{\chi}_1$, $\chi_2 = \tilde{\chi}_1(1-\tilde{\chi}_2)$ et $\chi_j = \tilde{\chi}_1(1-\tilde{\chi}_2)\cdots(1-\tilde{\chi}_j)$. Les χ_j conviennent car on a de plus,

$$1 - \sum_{j=1}^{p} \chi_j = \prod_{j=1}^{p}(1-\tilde{\chi}_j) = 0 \quad \text{sur} \quad K.$$

□

8.2 Restriction à un ouvert

Définition 8.2.1. *Soit $\omega \subset \Omega$ un ouvert et soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Pour $\varphi \in C_0^\infty(\omega)$ on définit $\tilde{\varphi} \in C_0^\infty(\Omega)$ qui est égale à φ sur ω et à 0 sur $\Omega \setminus \omega$. Alors, la forme linéaire $T|_\omega$ définie sur $C_0^\infty(\omega)$ par*

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\omega), \ < T|_\omega, \varphi >=< T, \tilde{\varphi} >$$

est une distribution sur ω appelée la restriction de T à ω.

Il est clair par raccordement, puisque supp $\varphi \subset \omega \subset \Omega$ est un compact, que $\tilde{\varphi} \in C_0^\infty(\Omega)$. Donc la définition est bien posée.

Définition 8.2.2. *Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et soit $\omega \subset \Omega$ un ouvert. On dit que T est nulle dans ω si $T|_\omega = 0$.*

On a alors un résultat de passage du local au global pour cette notion de nullité locale d'une distribution.

Lemme 8.2.3. *Soit $(\omega_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts de Ω et soit ω leur réunion. Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ telle que pour tout $i \in I$, $T|_{\omega_i} = 0$. Alors $T|_\omega = 0$.*

Démonstration : On doit montrer que, pour toute $\varphi \in C_0^\infty(\omega)$, $< T, \varphi >= 0$. Soit donc $\varphi \in C_0^\infty(\omega)$ et soit $K =$ supp φ. Comme $K \subset \bigcup_{i\in I} \omega_i$, on peut extraire de ce recouvrement ouvert de K un sous-recouvrement fini indicé par $J \subset I$ fini (propriété de Borel-Lebesgue). Soit alors $(\chi_i)_{i\in J}$ une partition de l'unité relative au recouvrement $(\omega_i)_{i\in J}$ de K. Alors pour tout $i \in J$, $\chi_i \in C_0^\infty(\omega_i)$ et $\sum_{i\in J} \chi_i(x) = 1$ pour $x \in \bigcup_{i\in J} \omega_i$. Comme φ est à support dans $K \subset \bigcup_{i\in J} \omega_i$, on a $\varphi = \sum_{i\in J} \chi_i \varphi$ et ainsi

$$< T, \varphi >= \sum_{i\in J} < T, \chi_i \varphi > .$$

Or, pour tout $i \in J$, $\chi_i \varphi \in C_0^\infty(\omega_i)$ et $T|_{\omega_i} = 0$, donc $< T, \chi_i \varphi >= 0$ et $< T, \varphi >= 0$.

□

8.3 Support d'une distribution

Le lemme 8.2.3 nous montre que pour toute distribution $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, il existe un plus grand ouvert où T est nulle, la réunion de tous les ouverts où T est nulle. Cela nous conduit à la définition du support d'une distribution.

Définition 8.3.1. *Pour $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, on appelle support de T, noté* supp T*, le complémentaire du plus grand ouvert où T est nulle.*

Remarque. Comme complémentaire d'un ouvert, supp T **est toujours un fermé**.

En traduisant la définition, on peut écrire les assertions suivantes :

1. $x_0 \notin$ supp $T \Leftrightarrow \exists V_{x_0}$, un voisinage ouvert de x_0 tel que : $\forall \varphi \in C_0^\infty(V_{x_0})$, $< T, \varphi >= 0$.
2. supp $T = \{x \in \Omega \mid T$ nulle près de $x\}^c$.
3. $x_0 \in$ supp $T \Leftrightarrow \forall V_{x_0}$, $\exists \varphi \in C_0^\infty(V_{x_0})$, $< T, \varphi >\neq 0$.
4. supp $T \subset F \Leftrightarrow T = 0$ dans F^c.

Proposition 8.3.2. *Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et soit $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ telles que* supp $T \cap$ supp $\varphi = \emptyset$*. Alors, $< T, \varphi >= 0$.*

Démonstration : La démonstration est analogue à celle du lemme 8.2.3, si ce n'est que la propriété de Borel-Lebesgue est cette fois appliquée à un recouvrement ouvert du compact supp φ.

$\square$

Nous avons aussi le résultat suivant, utile en pratique.

Proposition 8.3.3. *Pour toute distribution $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$,* supp $T = \emptyset \Leftrightarrow T = 0$.

Démonstration : Si $T = 0$ il est clair par définition que supp $T = \emptyset$. Réciproquement, si supp $T = \emptyset$, alors pour tout $x \in \Omega$, il existe un ouvert $\omega_x \subset \Omega$ contenant x tel que $T|_{\omega_x} = 0$. Par le lemme 8.2.3, $T = 0$ car $\bigcup_{x \in \Omega} \omega_x = \Omega$.

$\square$

Cette proposition a pour corollaire un principe de localisation.

Corollaire 8.3.4. *Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. On suppose que T est localement une fonction C^k pour $0 \leq k \leq \infty$,* i.e.

$$\forall x \in \Omega,\ \exists \omega_x \text{ ouvert },\ x \in \omega_x \text{ et } \exists f_x \in C^k(\omega_x),\ T|_{\omega_x} = T_{f_x}.$$

Alors, il existe $f \in C^k(\Omega)$ telle que $T = T_f$.

Démonstration : En effet, comme $\Omega = \bigcup_{x \in \Omega} \omega_x$, on peut choisir pour tout $x \in \Omega$, $f_x \in C^k(\omega_x)$ telle que $T|_{\omega_x} = T_{f_x}$. Or, sur $\omega_x \cap \omega_y$, $f_x = f_y$ car $T_{f_x}|_{\omega_x \cap \omega_y} = T|_{\omega_x \cap \omega_y} = T_{f_y}|_{\omega_x \cap \omega_y}$, puis on utilise la continuité de f_x et f_y pour en déduire $f_x = f_y$ partout et pas uniquement presque partout sur $\omega_x \cap \omega_y$.

Alors, on peut poser légitimement $f : \Omega \to \mathbb{C}$ définie par $f(z) = f_x(z)$ si $z \in \omega_x$. La fonction f est de classe C^k sur Ω car elle est C^k au voisinage de tout $x \in \Omega$ et on a : $\forall x \in \Omega,\ (T - T_f)|_{\omega_x} = 0$. Par définition du support, supp $(T - T_f) = \emptyset$, donc par la proposition précédente, $T = T_f$.

$\square$

On a aussi des résultats qui font le lien entre opérations sur les distributions et support. Tout d'abord, la multiplication.

Proposition 8.3.5. *Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et soit $a \in C^\infty(\Omega)$. Alors :* supp $(aT) \subset$ supp $a \cap$ supp T.

Démonstration : Soit $x_0 \in (\text{supp } a)^c \cup (\text{supp } T)^c$. Si $x_0 \in (\text{supp } a)^c$, il existe V_{x_0} voisinage de x_0 tel que $a(x) = 0$ pour tout $x \in V_{x_0}$. Alors si $\varphi \in C_0^\infty(V_{x_0})$, on a, pour tout $x \in \Omega$, $a(x)\varphi(x) = 0$. D'où $< aT, \varphi >=< T, a\varphi >= 0$ et $x_0 \notin$ supp (aT).

Si $x_0 \in (\text{supp } T)^c$, il existe V_{x_0} tel que $< T, \psi >= 0$ pour $\psi \in C_0^\infty(V_{x_0})$. Soit $\varphi \in C_0^\infty(V_{x_0})$. Alors $a\varphi \in C_0^\infty(V_{x_0})$ donc $< aT, \varphi >=< T, a\varphi >= 0$ et $x_0 \notin$ supp (aT).

$\square$

Pour la dérivation le résultat est évident.

Proposition 8.3.6. *Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$,* supp $\partial^\alpha T \subset$ supp T.

Terminons cette section par quelques exemples. D'autres seront détaillés en tds.

Exemple 8.3.7. *Cet exemple est fondamental. Soit f une fonction continue sur Ω. Alors* $\operatorname{supp} T_f = \operatorname{supp} f$ *où* $\operatorname{supp} f$ *est le support au sens classique de la fonction continue f.*

En effet, si $x_0 \notin \operatorname{supp} f$, il existe V_{x_0} voisinage ouvert de x_0 tel que $f(x) = 0$ pour $x \in V_{x_0}$. Alors, si $\varphi \in C_0^\infty(V_{x_0})$, $\varphi(x)f(x) = 0$ dans Ω, donc $< T_f, \varphi >= \int_\Omega f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = 0$. Donc, $x_0 \notin \operatorname{supp} T_f$. D'où la première inclusion : $\operatorname{supp} T_f \subset \operatorname{supp} f$. Réciproquement, si $x_0 \notin \operatorname{supp} T_f$, il existe V_{x_0} voisinage ouvert de x_0 tel que $\forall \varphi \in C_0^\infty(V_{x_0})$, $\int_\Omega f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = 0$. Par le lemme de Dubois-Reymond, f est nulle presque partout (donc partout puisque f est continue) dans V_{x_0}. Donc, $x_0 \notin \operatorname{supp} f$. D'où la seconde inclusion.

Exemple 8.3.8. *Pour tout $a \in \Omega$,* $\operatorname{supp} \delta_a = \{a\}$.

En effet, si $\varphi \in C_0^\infty(\Omega \setminus \{a\})$, on a $< \delta_a, \varphi >= \varphi(a) = 0$, donc $\operatorname{supp} \delta_a \subset \{a\}$. Réciproquement, soit V_a un voisinage ouvert de a et soit ρ une fonction pic au voisinage de a, $\rho(a) = 1$. Alors, $< \delta_a, \rho >= \rho(a) = 1 \neq 0$. Donc $a \in \operatorname{supp} \delta_a$. D'où l'inclusion inverse.

Exemple 8.3.9. *On a* $\operatorname{supp} \operatorname{vp}\left(\frac{1}{x}\right) = \mathbb{R}$.

En effet, soit $x_0 \neq 0$. Supposons que $x_0 > 0$, la démonstration est la même pour $x_0 < 0$. Soit ρ_{x_0} une fonction pic centrée en x_0, et supportée sur $[\frac{x_0}{2}, \frac{3x_0}{2}]$. On a, pour tout $\varepsilon > 0$ tel que $\varepsilon < \frac{x_0}{2}$,

$$\int_{x \geq \varepsilon} \frac{\rho_{x_0}(x)}{x}\mathrm{d}x = \int_{\frac{x_0}{2}}^{\frac{3x_0}{2}} \frac{\rho_{x_0}(x)}{x}\mathrm{d}x = C > 0.$$

D'où, $< \operatorname{vp}\left(\frac{1}{x}\right), \rho_{x_0} > \neq 0$ et $x_0 \in \operatorname{supp} \operatorname{vp}\left(\frac{1}{x}\right)$. Donc $\mathbb{R}^* \subset \operatorname{supp} \operatorname{vp}\left(\frac{1}{x}\right) \subset \mathbb{R}$. Comme le support d'une distribution est un fermé, on a nécessairement $\operatorname{supp} \operatorname{vp}\left(\frac{1}{x}\right) = \mathbb{R}$.

8.4 Distributions à support compact

Définition 8.4.1. *On dit que $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ est à support compact lorsque* $\operatorname{supp} T$ *est compact. On note l'ensemble des distributions à support compact $\mathcal{E}'(\Omega)$.*

Proposition 8.4.2. *Une distribution de $\mathcal{E}'(\Omega)$ peut être prolongée à $C^\infty(\Omega)$.*

Démonstration : Soit K le support compact de $T \in \mathcal{E}'(\Omega)$. On se donne K' un compact contenant K et K'' un compact contenant K' de sorte qu'il existe χ une fonction plateau qui soit égale à 1 sur K' et qui soit supportée dans K''. On vérifie que, pour $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$:

$$< T, \varphi >=< T, \chi\varphi > + < T, (1-\chi)\varphi > .$$

Comme $(1-\chi)\varphi$ est supportée dans un compact contenu dans le complémentaire du support de T, $< T, (1-\chi)\varphi >= 0$. D'où : $\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega), < T, \varphi >=< T, \chi\varphi >$.

On **définit** alors $< T, \phi >$ pour $\phi \in C^\infty$ par : $< T, \phi >=< T, \chi\phi >$. Comme $\chi\phi \in C_0^\infty(\Omega)$, $< T, \chi\phi >$ est bien définie. De plus,

$$||\partial^\alpha(\chi\phi)|| \leq C \max_{|\beta| \leq |\alpha|} ||\partial^\beta \phi||_{K''}.$$

□

On en déduit une définition de la continuité dans $C^\infty(\Omega)$ de $\phi \rightarrow < T, \phi >$. Cette continuité est caractérisée par une convergence uniforme sur tout compact de la suite $(\phi_n)_{n\geq 0}$ et des suites des dérivées $(\partial^\alpha \phi_n)_{n\geq 0}$ respectivement vers ϕ et les dérivées $\partial^\alpha \phi$. Contrairement à la convergence associée aux fonctions à support compact, il n'y a pas ici d'hypothèse sur les supports.

On peut montrer qu'en fait, on a exactement $\mathcal{E}'(\Omega) = (C^\infty(\Omega))'$ tout comme on a déjà vu que $\mathcal{D}'(\Omega) = (C_0^\infty(\Omega))'$ (voir [3, Theorem 2.3.1, p44]).

Proposition 8.4.3. *Toute distribution à support compact est d'ordre fini.*

Démonstration : On rappelle l'égalité $< T, \varphi >=< T, \varphi(1-\chi) > + < T, \varphi\chi >=< T, \varphi\chi >$, où $\varphi\chi$ est supportée dans K''. Il existe alors un entier m_0 et une constante C_0, tous les deux associés à la majoration de $< T, \phi >$ pour $\phi \in C_0^\infty(K'')$, tels que

$$| < T, \varphi > | \leq C_0 \max_{|\alpha| \leq m_0} \max_{x \in K''} |\partial^\alpha(\varphi\chi)|.$$

L'application de la formule de Leibniz donne

$$\partial^\alpha(\varphi\chi) = \sum_{\beta+\gamma=\alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^\beta \varphi \partial^\gamma \chi$$

et les majorations uniformes, pour $|\gamma| \leq m_0$, de $\partial^\gamma \chi$ par $||\chi||_{m_0} = \max_{x \in K'', |\gamma| \leq m_0} |\partial^\gamma \chi(x)|$, et de $\sum_{\beta+\gamma=\alpha} \binom{\alpha}{\beta} = 2^{|\alpha|}$ permettent d'obtenir une constante C telle que

$$C_0 \max_{|\alpha| \leq m_0} \max_{x \in K''} |\partial^\alpha(\varphi\chi)| \leq C \max_{|\alpha| \leq m_0} \max_{x \in \mathrm{supp}\varphi} |\partial^\alpha \varphi(x)|$$

et

$$| < T, \varphi > | \leq C \max_{|\alpha| \leq m_0} \max_{x \in \mathrm{supp}\varphi} |\partial^\alpha \varphi(x)|.$$

Cela prouve que T est d'ordre au plus m_0 donc d'ordre fini.

□

8.5 Distributions à support ponctuel

Nous avons déjà vu dans les exemples plus haut que supp $\delta_a = \{a\}$. On montre de même que le support des dérivées du Dirac est aussi un singleton. En fait, la réciproque est vraie au sens du théorème suivant.

Théorème 8.5.1. *Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et soit $x_0 \in \Omega$. Supposons que* supp $T = \{x_0\}$*. Il existe alors un entier m et des nombres complexes $(a_\alpha)_{|\alpha| \leq m}$ tels que*

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega), < T, \varphi >= \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \partial^\alpha \varphi(x_0),$$

ce qui peut encore s'écrire

$$T = \sum_{|\alpha| \leq m} \tilde{a}_\alpha \partial^\alpha \delta_{x_0}, \text{ ou } \tilde{a}_\alpha = (-1)^{|\alpha|} a_\alpha.$$

Démonstration : Pour simplifier les notations et ne conserver que les principales idées de la preuve, nous allons nous restreindre au cas de la dimension $d = 1$. Sans perdre en généralité on peut aussi supposer que $x_0 = 0$.

Tout d'abord, comme T est à support compact, T est d'ordre fini. Notons m l'ordre de T. Soit χ une fonction plateau valant 1 dans un voisinage compact de 0 inclus dans $]-1, 1[$ et 0 hors de $]-1, 1[$. On note, pour $r > 0$ et $x \in \mathbb{R}$, $\chi_r(x) = \chi(x/r)$.

Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Alors, par la formule de Taylor avec reste intégral :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{x^{m+1}}{m!} \int_0^1 (1-u)^m \varphi^{(m+1)}(xu) \mathrm{d}u.$$

En posant, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\psi(x) = \frac{x^{m+1}}{m!} \int_0^1 (1-u)^m \varphi^{(m+1)}(xu) \mathrm{d}u$, on définit une fonction de classe C^∞ et on a $\psi(x) = o(x^m)$ au voisinage de 0.

La fonction $\chi\varphi$ est à support compact et elle est égale à φ au voisinage de 0, donc, comme supp $T = \{0\}$, on a :

$$< T, \varphi >=< T, \chi\varphi >= \sum_{k=0}^{m} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} < T, \chi x^k > + < T, \chi\psi > .$$

Or, $\chi\psi$ est dans $C_0^\infty(\mathbb{R})$ et $(\chi\psi)(x) = o(x^m)$ au voisinage de 0. Montrons que cela entraîne que $< T, \chi\psi >= 0$.

Notons $\tilde{\psi} = \chi\psi$. Par la formule de Leibniz, on a

$$\forall l \leq m, \ (\chi_r\tilde{\psi})^{(l)} = \sum_{k=0}^{l} \binom{k}{l} \chi_r^{(l-k)} \tilde{\psi}^{(k)}.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\tilde{\psi}(x) = o(x^m)$ au voisinage de 0, par unicité du développement limité, $\tilde{\psi}^{(k)}(x) = o(x^{m-k})$. Par ailleurs, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\chi_r^{(l-k)}(x) = r^{k-l}\chi^{(l-k)}(x/r)$. Alors, pour r assez petit et $|x| \leq r$,

$$|\chi_r^{(l-k)}(x)\tilde{\psi}^{(k)}(x)| \leq r^{m-k}r^{k-l}||\chi^{(l-k)}||_\infty = r^{m-l}||\chi^{(l-k)}||_\infty \leq \varepsilon||\chi^{(l-k)}||_\infty.$$

Donc,

$$\lim_{r\to 0} \sup_{|x|\leq r} |(\chi_r\tilde{\psi})^{(l)}(x)| = 0.$$

Comme supp $T = \{0\}$ et que χ_r vaut 1 au voisinage de 0,

$$\forall r > 0, \ < T, \tilde{\psi} >=< T, \chi_r\tilde{\psi} > .$$

Comme T est d'ordre m, que $\chi_r\tilde{\psi}$ est à support dans $[-r, r]$ et $[-r, r] \subset [-1, 1]$ qui est un compact fixe, on a

$$\forall 0 < r < 1, \ | < T, \chi_r\tilde{\psi} > | \leq \sum_{j\leq m} C_{[-1,1]}||(\chi_r\tilde{\psi})^{(l)}||_\infty \xrightarrow[r\to 0]{} 0.$$

D'où, $| < T, \chi_r\tilde{\psi} > | \xrightarrow[r\to 0]{} 0$ et ainsi $< T, \tilde{\psi} >= 0$.

Finalement,

$$< T, \varphi >= \sum_{k=0}^{m} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} < T, \chi x^k > +0 = \sum_{k=0}^{m} \left(\frac{1}{k!} < T, \chi x^k > \right) \varphi^{(k)}(0).$$

D'où le résultat en posant $a_k = \frac{(-1)^k}{k!} < T, \chi x^k >$.

$\square$

Chapitre 9

Convolution des distributions II

9.1 Dérivation et intégration sous le crochet

Nous allons commencer par démontrer deux résultats utiles pour la suite qui sont les analogues dans la théorie des distributions des théorèmes classiques de dérivation et d'intégration sous le signe intégral.

Proposition 9.1.1 (Dérivation sous le crochet). *Soit $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}_x^q \times \mathbb{R}_y^d)$ et soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$. On suppose que pour tout $x \in \mathbb{R}^q$, $\operatorname{supp} \phi(x,\cdot) \subset \Omega$. Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. On pose, pour $x \in \mathbb{R}^q$, $u(x) =< T, \phi(x,\cdot) >$. Alors, $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^q)$ et on a*

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^q,\ \forall x \in \mathbb{R}^q,\ \partial^\alpha u(x) =< T, \partial_x^\alpha \phi(x,\cdot) > .$$

Démonstration : Soient $x_0 \in \mathbb{R}^q$ et $y \in \mathbb{R}^d$. Pour $h \in \mathbb{R}^q$, la formule de Taylor à l'ordre 1 nous donne :

$$\phi(x_0+h,y) = \phi(x_0,y) + \sum_{j=1}^q \partial_{x_j}\phi(x_0,y)h_j + R(x_0,y,h),$$

avec

$$R(x_0,y,h) = 2\sum_{|\alpha|\le 2} \frac{h^\alpha}{\alpha!}\int_0^1 (1-t)\partial_x^\alpha \phi(x_0+th,y)\mathrm{d}t.$$

Comme $y \mapsto R(x_0,y,h)$ est de classe C^∞ à support dans $\operatorname{supp} \phi(x_0,\cdot)$ et puisque T est une distribution sur Ω, il existe $C > 0$ et $m \in \mathbb{N}$ indépendants de x_0 et h tels que

$$| < T, R(x_0,y,h) > | \le C \sum_{|\beta|\le m} ||\partial_x^\beta R(x_0,\cdot,h)||_\infty.$$

Or, pour $|h| \le 1$,

$$\begin{aligned} |\partial_y^\beta R(x_0,y,h)| &\le 2\sum_{|\alpha|\le 2} \frac{h^\alpha}{\alpha!}\int_0^1 (1-t)\partial_y^\beta\partial_x^\alpha \phi(x_0+th,y)\mathrm{d}t \\ &\le C|h|^2 \sum_{|\alpha|\le 2} \sup_{(x,y)\in\overline{B(0,1)}\times \operatorname{supp} \phi(x_0,\cdot)} |\partial_y^\beta\partial_x^\alpha\phi(x,y)|. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$| < T, R(x_0,y,h) > | = \mathcal{O}(|h|^2)$$

et finalement

$$u(x_0+h) = u(x_0) + \sum_{j=1}^q < T, \partial_{x_j}\phi(x_0,y) > h_j + \mathcal{O}(|h|^2).$$

Cela prouve que u est différentiable par rapport à x et que l'on a

$$\partial_{x_i} u(x) =< T, \partial_{x_i}\phi(x,y) > .$$

Comme cela est valable pour tout i, on en déduit de plus que u est de classe C^1. On obtient ensuite le résultat pour α quelconque par récurrence.

□

Proposition 9.1.2 (Intégration sous le crochet)**.** *Soit $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}_x^q \times \mathbb{R}_y^d)$ et soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$. On suppose que pour tout $x \in \mathbb{R}^q$, supp $\phi(x,\cdot) \subset \Omega$. Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. On pose, pour $x \in \mathbb{R}^q$, $u(x) =< T, \phi(x,\cdot) >$. Alors, $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^q)$ et on a*

$$\int_{\mathbb{R}^q} u(x)\mathrm{d}x = \left\langle T, \int_{\mathbb{R}^q} \phi(x,\cdot)\mathrm{d}x \right\rangle.$$

Démonstration : On commence par démontrer la proposition dans le cas où $q = 1$. Soit $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}_x^q \times \mathbb{R}_y^d)$. On choisit $A > 0$ et un compact $K \subset \Omega$ de sorte que supp $\phi \subset [-A, A] \times K$. Soit alors $\psi : \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{C}$ définie par :

$$\psi(x,y) = \int_{-\infty}^{x} \phi(t,y)\mathrm{d}t.$$

Alors $\psi \in C^\infty(\mathbb{R} \times \Omega)$ et, pour tout x fixé, le support de $y \mapsto \psi(x,y)$ est inclus dans K. Alors, par la proposition 9.1.1, la fonction

$$u : x \mapsto < T, \psi(x,y) >= \left\langle T, \int_{-\infty}^{x} \phi(t,y)\mathrm{d}t \right\rangle$$

est de classe C^∞ et on a

$$\forall x \in \mathbb{R},\ u'(x) =< T, \partial_x\psi(x,y) >=< T, \phi(x,y) > .$$

En intégrant cette dernière relation, on obtient :

$$\left\langle T, \int_{-\infty}^{x} \phi(t,y)\mathrm{d}t \right\rangle = u(x) = \int_{-\infty}^{x} u'(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{x} < T, \phi(t,y) > \mathrm{d}t.$$

En prenant $x = A$ par exemple, on obtient alors la proposition dans le cas $q = 1$.

Pour $q > 1$ on procède par intégrations successives. Soit $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^q \times \Omega)$. Soit $A > 0$ tel que supp $\phi \subset [-A, A]^q \times K$ pour un compact $K \subset \Omega$. On définit alors $\psi_q : \mathbb{R}^q \times \Omega \to \mathbb{C}$ par

$$\forall (x', x_q, y) \in \mathbb{R}^{q-1} \times \mathbb{R} \times \Omega,\ \psi_q(x', x_q, y) = \int_{-\infty}^{x_q} \phi(x', t, y)\mathrm{d}t.$$

Par le résultat pour $q = 1$, on a

$$\left\langle T, \int_{\mathbb{R}} \phi(x', t, y)\mathrm{d}t \right\rangle = \int_{\mathbb{R}} < T, \phi(x', t, y) > \mathrm{d}t.$$

Puis, on définit $\psi_{q-1} : \mathbb{R}^{q-1} \times \Omega \to \mathbb{C}$ par

$$\forall (x', x_{q-1}, y) \in \mathbb{R}^{q-2} \times \mathbb{R} \times \Omega,\ \psi_{q-1}(x', x_q, y) = \int_{-\infty}^{x_{q-1}} \left(\int_{\mathbb{R}} \phi(x', t_1, t_2, y)\mathrm{d}t_1 \right) \mathrm{d}t_2.$$

On a alors,

$$\begin{aligned} < T, \psi_{q-1}(x', x_{q-1}, y) > &= \int_{-\infty}^{x_{q-1}} < T, \int_{\mathbb{R}} \phi(x', t, t_1, y) \mathrm{d}t_1 > \mathrm{d}t \\ &= \int_{-\infty}^{x_{q-1}} \int_{\mathbb{R}} < T, \phi(x', t, t_1, y) \mathrm{d}t_1 > \mathrm{d}t. \end{aligned}$$

La fin de la démonstration se fait alors par récurrence.

□

9.2 Produit tensoriel de deux distributions

Nous commençons par un petit calcul dans le cadre des fonctions classiques. Soient Ω_1 et Ω_2 deux ouverts respectivement de $\mathbb{R}^{d_1}$ et $\mathbb{R}^{d_2}$. Pour $j = 1, 2$, soit $u_j \in C^0(\Omega_j)$. On définit alors la fonction $u_1 \otimes u_2$ sur $\Omega_1 \times \Omega_2$ par

$$\forall (x_1, x_2) \in \Omega_1 \times \Omega_2, \ (u_1 \otimes u_2)(x_1, x_2) = u_1(x_1) u_2(x_2).$$

Alors, $u_1 \otimes u_2 \in C^0(\Omega_1 \times \Omega_2)$ et si $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_1 \times \Omega_2)$, on a, par le théorème de Fubini,

$$\begin{aligned} < u_1 \otimes u_2, \varphi > &= \int_{\mathbb{R}^{d_1}} \int_{\mathbb{R}^{d_2}} u_1(x_1) u_2(x_2) \varphi(x_1, x_2) \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \\ &= \int_{\mathbb{R}^{d_1}} u_1(x_1) \left(\int_{\mathbb{R}^{d_2}} u_2(x_2) \varphi(x_1, x_2) \mathrm{d}x_2 \right) \mathrm{d}x_1 \\ &= < u_1, < u_2, \varphi(x_1, \cdot) >> . \end{aligned}$$

En particulier, si φ est à variables séparées, *i.e.*, il existe pour $j = 1, 2$, $\varphi_j \in C_0^\infty(\Omega_j)$ telles que $\varphi(x_1, x_2) = \varphi_1(x_1) \varphi_2(x_2)$, on a :

$$< u_1 \otimes u_2, \varphi_1 \otimes \varphi_2 >=< u_1, \varphi_1 > \cdot < u_2, \varphi_2 > .$$

Nous allons dans la suite généraliser ce calcul au cas des distributions.

Théorème 9.2.1. *Soient $T_1 \in \mathcal{D}'(\Omega_1)$ et $T_2 \in \mathcal{D}'(\Omega_2)$. Il existe une unique distribution $T \in \mathcal{D}'(\Omega_1 \times \Omega_2)$ telle que, pour toutes fonctions $\varphi_j \in C_0^\infty(\Omega_j)$, $j = 1, 2$, on ait*

$$< T, \varphi_1 \otimes \varphi_2 >=< T_1, \varphi_1 > \cdot < T_2, \varphi_2 > .$$

De plus, pour $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_1 \times \Omega_2)$,

$$< T, \varphi >=< T_1, < T_2, \varphi(x_1, \cdot) >>=< T_2, < T_1, \varphi(\cdot, x_2) >> .$$

Si les T_j sont de plus à support compact on a les mêmes formules pour $\varphi \in C^\infty(\Omega_1 \times \Omega_2)$. On écrit alors $T = T_1 \otimes T_2 = T_2 \otimes T_1$ et T s'appelle le produit tensoriel des distributions T_1 et T_2.

Démonstration : Notons $\psi : x_1 \mapsto < T_2, \varphi(x_1, \cdot) >$. Alors par la dérivation sous le crochet ψ est une fonction dans $C_0^\infty(\Omega_1)$.
On pose $< T, \varphi >=< T_1, \psi >$ et on prouve que c'est bien une distribution dans $\mathcal{D}'(\Omega_1 \times \Omega_2)$. En effet, en appliquant sucessivement la caractérisation d'une distribtion à T_1 puis T_2, on obtient pour tout compact $K = K_1 \times K_2 \subset \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2}$, l'existence de constantes $C_1 > 0$ et $C_2 > 0$ ainsi que d'entiers m_1 et m_2 tels que, pour toute $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_1 \times \Omega_2)$ avec supp $\varphi \subset K$,

$$| < T, \varphi > | = | < T_1, \psi > | \leq C_1 \max_{|\alpha| \leq m_1} || < T_2, \partial_x^\alpha \varphi(x, \cdot) ||_{\infty, x} \leq C_1 C_2 \max_{|\alpha| \leq m_1, |\beta| \leq m_2} || \partial_y^\beta \partial_x^\alpha \varphi(x, y) ||_\infty.$$

Donc T est bien une distribution dans $\mathcal{D}'(\Omega_1 \times \Omega_2)$. Puis on utilise la densité de $C_0^\infty(\Omega_1) \otimes C_0^\infty(\Omega_2)$ dans $C_0^\infty(\Omega_1 \times \Omega_2)$ pour prouver l'unicité (voir [6], Chapitre 1, Proposition 3.7). Enfin on montre l'égalité avec $< T_1, \varphi_1 > \cdot < T_2, \varphi_2 >$ en utilisant l'unicité puisque cette autre distribution vérifie aussi la propriété voulue.

□

Le produit tensoriel se comporte bien vis-à-vis des opérations sur les distributions.

Proposition 9.2.2. *Soient $T_1 \in \mathcal{D}'(\Omega_1)$ et $T_2 \in \mathcal{D}'(\Omega_2)$. Soient $a \in C^\infty(\Omega_1)$ et $b \in C^\infty(\Omega_2)$. Alors :*

1. $(a \otimes b)(T_1 \otimes T_2) = (aT_1) \otimes (bT_2)$.
2. *Pour tout $j \in \{1, \ldots, d_1\}$, $\partial_j(T_1 \otimes T_2) = (\partial_j T_1) \otimes T_2$ et pour tout $j \in \{d_1 + 1, \ldots, d_1 + d_2\}$, $\partial_j(T_1 \otimes T_2) = T_1 \otimes (\partial_j T_2)$.*

Démonstration : Calcul direct dans les deux cas, où l'on prend $\varphi = \varphi_1 \otimes \varphi_2$ puis on utilise la définition du produit tensoriel.

□

Proposition 9.2.3. *Si $(T_n)_{n\geq 0}$ converge vers T dans $\mathcal{D}'(\Omega_1)$ et si $(S_n)_{n\geq 0}$ converge vers S dans $\mathcal{D}'(\Omega_2)$, alors $(T_n \otimes S_n)_{n\geq 0}$ converge vers $T \otimes S$ dans $\mathcal{D}'(\Omega_1 \times \Omega_2)$.*

Démonstration : Soit $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_1 \times \Omega_2)$. Soit $K = K_1 \times K_2$ un compact de $\Omega_1 \times \Omega_2$ tel que $\text{supp } \varphi \subset K$. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\psi_n : x \mapsto < S_n, \varphi(x, \cdot) >$. Alors ψ_n est de classe C^∞ sur Ω_1 par la dérivation sous le crochet et on a

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^{d_1},\ \forall x \in \Omega_1,\ \partial^\alpha \psi_n(x) = < S_n, \partial_x^\alpha \varphi(x, \cdot) > .$$

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\text{supp } \psi_n \subset K_1$. Posons $\psi : x \mapsto < S, \varphi(x, \cdot) >$ et montrons que $\psi_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \psi$ dans $C_0^\infty(\Omega_1)$. Il nous reste donc à prouver que, pour tout α, $(\partial^\alpha \psi_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément vers $\partial^\alpha \psi$ sur K_1.
Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points de K_1 qui converge vers $x \in K_1$. On a :

$$\partial^\alpha \psi_n(x_n) = < S_n, \partial_x^\alpha \varphi(x_n, \cdot) > \quad \text{et} \quad \partial_x^\alpha \varphi(x_n, \cdot) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \partial_x^\alpha \varphi(x, \cdot) \text{ dans } C_0^\infty(\Omega_2).$$

En effet, $\text{supp } (\partial_x^\alpha \varphi(x_n, \cdot)) \subset K_2$ et puisque $\partial_y^\beta \partial_x^\alpha \varphi$ est de classe C^1 et à support compact, par les accroissements finis,

$$\exists C > 0,\ \forall y \in K_2,\ |\partial_y^\beta \partial_x^\alpha \varphi(x_n, y) - \partial_y^\beta \partial_x^\alpha \varphi(x, y)| \leq C|x_n - x|.$$

Il vient,

$$\partial^\alpha \psi_n(x_n) - \partial^\alpha \psi(x) = < S_n, \partial_x^\alpha \varphi(x_n, \cdot) - \partial_x^\alpha \varphi(x, \cdot) > \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Enfin, comme $T_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} T$ dans $\mathcal{D}'(\Omega_1)$, on a $T_n(\psi_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} T(\psi)$, ce qui termine notre démonstration.

□

Proposition 9.2.4. *Soient $T_1 \in \mathcal{D}'(\Omega_1)$ et $T_2 \in \mathcal{D}'(\Omega_2)$. Alors,*

$$\text{supp } (T_1 \otimes T_2) = \text{supp } T_1 \times \text{supp } T_2$$

Démonstration : Soit $y_0 \notin \text{supp } T_2$. Il existe un voisinage V de y_0 tel que, pour toute $\psi \in C_0^\infty(V)$, $< T_2, \psi >= 0$. Alors, pour $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{d_1} \times V)$ on a :

$$< T_1 \otimes T_2, \varphi >=< T_1, < T_2, \varphi(x, \cdot) > >=< T_1, 0 >= 0,$$

ce qui démontre que supp $(T_1 \otimes T_2) \subset \mathbb{R}^{d_1} \times \text{supp } T_2$. De même, on démontre que supp $(T_1 \otimes T_2) \subset \text{supp } T_1 \times \mathbb{R}^{d_2}$. Ainsi,

$$\text{supp } (T_1 \otimes T_2) \subset (\text{supp } T_1 \times \mathbb{R}^{d_2}) \cap (\mathbb{R}^{d_1} \times \text{supp } T_2) = \text{supp } T_1 \times \text{supp } T_2.$$

Pour montrer l'inclusion réciproque, prenons $(x_0, y_0) \in \text{supp } T_1 \times \text{supp } T_2$. Soit W un voisinage de (x_0, y_0) et soient U et V des voisinages respectifs de x_0 et y_0 tels que $U \times V \subset W$. Comme $x_0 \in \text{supp } T_1$, il existe $\varphi_1 \in C_0^\infty(U)$ telle que $< T_1, \varphi_1 >\neq 0$. Comme $y_0 \in \text{supp } T_2$, il existe $\varphi_2 \in C_0^\infty(V)$ telle que $< T_2, \varphi_2 >\neq 0$. Alors, $\varphi_1 \otimes \varphi_2 \in C_0^\infty(W)$ et on a :

$$< T_1 \otimes T_2, \varphi_1 \otimes \varphi_2 >=< T_1, \varphi_1 > \cdot < T_2, \varphi_2 >\neq 0.$$

On a bien démontré que $(x_0, y_0) \in \text{supp } (T_1 \otimes T_2)$.

□

Exemple 9.2.5. *Soient $a_1 \in \Omega_1$ et $a_2 \in \Omega_2$. Alors, $\delta_{a_1} \otimes \delta_{a_2} = \delta_{(a_1,a_2)}$.*

Exemple 9.2.6. *Les monômes dans $\mathbb{R}^d$, $x \mapsto x^\alpha$ sont des produits tensoriels. En effet par définition,*

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \otimes \cdots \otimes x_d^{\alpha_d}.$$

Exemple 9.2.7. *Soit H la distribution de Heaviside sur $\mathbb{R}$. Soit $(x_1, \ldots, x_d) \in R^d$. Alors,*

$$\partial_{x_1} \cdots \partial_{x_d} (H(x_1) \otimes \cdots \otimes H(x_d)) = \delta_{x_1=0} \otimes \cdots \otimes \delta_{x_d=0} = \delta_{(0,\ldots,0)}.$$

9.3 Produit de convolution de deux distributions

Nous avons déjà défini le produit de convolution de deux fonctions dans $L^1(\mathbb{R}^d)$. Soient u et v deux fonctions dans $L^1(\mathbb{R}^d)$ et calculons $T_{u\star v}$. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. Alors la fonction $(x, y) \mapsto u(y)v(x-y)\varphi(x)$ est dans $L^1(\mathbb{R}^{2d})$ et on a

$$< u \star v, \varphi >= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} u(y)v(x-y)\varphi(x) \mathrm{d}y \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} u(y)v(z)\varphi(y+z) \mathrm{d}y \mathrm{d}z$$

d'où,

$$< u \star v, \varphi >=< u_y \otimes v_z, \varphi(y+z) >,$$

le crochet de droite étant pris dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$. Nous allons donc poser comme définition de la convolution cette "formule" pour toutes les distributions. La principale difficulté provient ici du fait que même lorsque φ est à support compact, en général, $(y, z) \mapsto \varphi(y+z)$ ne l'est pas. Pour éviter ce problème, dans un premier temps nous allons supposer que l'une des deux distributions à convoler est elle à support compact.

9.3.1 Définition

Définition 9.3.1. *Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ et soit $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ (ou l'inverse). La forme linéaire notée $T \star S$ définie sur $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ par*

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d),\ < T \star S > = < T \otimes S, \varphi^\Delta >$$

où $\varphi^\Delta : (y,z) \mapsto \varphi(y+z)$, est une distribution appelée convolution des distributions T et S.

Démonstration : Le fait que le membre de droite ait un sens résulte du fait que S est supposée à support compact. On peut donc multiplier φ^Δ par une fonction plateau valant 1 sur le support de S sans changer la valeur du membre de gauche et ainsi se ramener à une fonction à support compact.

Posons $A = < T \otimes S, \varphi^\Delta >$. Comme S appartient à $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$, il existe $C_0 > 0$, $m \in \mathbb{N}$ et $K \subset \mathbb{R}^d$ un compact tels que, pour toute $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ et tout $y \in \mathbb{R}^d$,

$$| < S, \psi(y + \cdot) > | \leq C_0 \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha \psi(y+z)|.$$

D'autre part, $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ et la fonction $y \mapsto < S, \varphi(y + \cdot) >$ est dans $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ lorsque $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. Il existe donc $C_1 > 0$ et $k \in \mathbb{N}$ tels que

$$|A| \leq C_1 \sum_{|\beta| \leq k} \sup_{y \in \mathbb{R}^d} |\partial_y^\beta < S, \varphi(y + \cdot) > | \leq C_1 \sum_{|\beta| \leq k} \sup_{y \in \mathbb{R}^d} | < S, \partial_y^\beta \varphi(y + \cdot) > |.$$

par dérivation sous le crochet. De là, en utilisant la première estimation avec $\psi = \partial^\beta \varphi$, on trouve

$$|A| \leq C_1 C_0 \sum_{|\alpha| \leq m} \sum_{|\beta| \leq k} \sup_{x \in K, y \in \mathbb{R}^d} |\partial^{\alpha+\beta} \varphi(y+z)| \leq C_1 C_0 \sum_{|\gamma| \leq m+k} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |\partial^\gamma \varphi(x)|.$$

Cette dernière inégalité montre bien que $T \star S$ est une distribution sur $\mathbb{R}^d$.

□

9.3.2 Propriétés de base

Commençons par donner les propriétés algébriques de base du produit de convolution.

Proposition 9.3.2. *Soient $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, $S, U \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$. On a*

1. *Associativité : $T \star (S \star U) = (T \star S) \star U$.*
2. *Commutativité : $T \star S = S \star T$.*
3. *Élément neutre : $T \star \delta_0 = \delta_0 \star T = T$.*

Démonstration : La commutativité provient de l'égalité montrée dans la définition du produit tensoriel. Le fait que δ_0 est élément neutre pour la convolution est un calcul direct. L'associativité se voit immédiatement en écrivant la formule du produit tensoriel.

□

La dérivation se comporte très bien par rapport au produit de convolution.

Proposition 9.3.3. *Soient $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ et $\alpha \in \mathbb{N}^d$. Alors*

$$\partial^\alpha (T \star S) = (\partial^\alpha T) \star S = T \star (\partial^\alpha S).$$

En particulier, $(\partial^\alpha \delta_0) \star T = \partial^\alpha T$.
Plus généralement, pour toute décomposition du multi-indice $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$, on a

$$\partial^\alpha (T \star \varphi) = (\partial^{\alpha_1} T) \star (\partial^{\alpha_2} \varphi).$$

Démonstration : On ne démontre que le premier point, les deux autres en découlent. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. On a

$$< \partial^\alpha (T \star S), \varphi >= (-1)^{|\alpha|} < T \star S, \partial^\alpha \varphi >= (-1)^{|\alpha|} < T_y < S_z, (\partial^\alpha \varphi)(y+z) >> .$$

Or, $(\partial^\alpha \varphi)(y+z) = \partial_z^\alpha (\varphi(y+z))$ et $< S_z, \partial_z^\alpha (\varphi(y+z)) >= (-1)^{|\alpha|} < \partial^\alpha S, \varphi(y+\cdot) >$. D'où,

$$< \partial^\alpha (T \star S), \varphi >=< T_y, < (\partial^\alpha S)_z, \varphi(y+z) >>=< T \star (\partial^\alpha S), \varphi > .$$

L'autre égalité se démontre de même en utilisant le fait que l'on a aussi $(\partial^\alpha \varphi)(y+z) = \partial_y^\alpha (\varphi(y+z))$.

□

Remarque. L'associativité s'étend de manière naturelle au cas du produit de convolution de k distributions qui est donc définit dès lors qu'au plus une n'est pas à support compact. Cette hypothèse est importante comme le montre l'exemple suivant. Prenons $T = 1$, $S = \delta_0'$ et $U = H$ la distribtion de Heaviside. Alors seule S est à support compact, T et U ne le sont pas et on a $(1 \star \delta_0') \star H = 0$ car $1 \star \delta_0' = (1)' \star \delta_0 = 0 \star \delta_0 = 0$ alors que $1 \star (\delta_0' \star H) = 1$ car $\delta_0' \star H = \delta_0 \star H' = \delta_0 \star \delta_0 = \delta_0$ et $1 \star \delta_0 = 1$.

Le produit de convolution est continu.

Proposition 9.3.4.
1. *Supposons que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers S dans $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ et soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$. Alors $(T \star S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $T \star S$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$.*
2. *Supposons que $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers T dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ et soit $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$. Alors $(T_n \star S)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $T \star S$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$.*

Démonstration : Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. On a $< T \star S_n, \varphi >=< S_n \star T, \varphi >=< S_n, < T, \varphi(y+\cdot) >>$. Comme la fonction $y \mapsto < T, \varphi(y+\cdot) >$ est C^∞ on peut passer à la limite dans $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ pour obtenir que $< T \star S_n, \varphi >$ tend vers $< S, < T, \varphi(y+\cdot) >>=< S \star T, \varphi >$. On procède de même pour le second point.

□

9.3.3 Convolution et support

Nous avons un premier résultat sur le support du produit de convolution de deux distributions.

Proposition 9.3.5. *Soient $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ et $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$. Alors* supp $(T \star S) \subset$ supp $T +$ supp S.

Démonstration : On introduit l'application

$$s: \begin{array}{ccc} \text{supp } T \times \text{supp } S & \to & \mathbb{R}^d \\ (x,y) & \mapsto & x+y \end{array}.$$

Soit $x \notin \text{supp } T + \text{supp } S$. Puisque $\text{supp } T + \text{supp } S$ est un fermé, il existe $\delta > 0$ tel que $B(x,\delta) \cap (\text{supp } T + \text{supp } S) = \emptyset$. Alors, pour $\varphi \in C_0^\infty(B(x,\delta))$, on a

$$\text{supp } \varphi^\Delta \cap (\text{supp } T \times \text{supp } S) = s^{-1}(\text{supp } \varphi) \subset s^{-1}(B(x,\delta)) = \emptyset.$$

Ainsi, $< T \star S, \varphi >=< T \otimes S, \varphi^\Delta >= 0$ et $x \notin \text{supp } (T \star S)$.

□

L'inclusion réciproque n'est pas vraie en général. Il suffit de prendre deux fonctions localement intégrables u et v avec $u = 1$ et $\int_{\mathbb{R}^d} v(x)\mathrm{d}x = 0$. On a alors $u \star v = 0$ d'où $\text{supp } T_u \star T_v = \emptyset$ tandis que $\text{supp } T_u + \text{supp } T_v = \mathbb{R}^d$ puisque $\text{supp } T_u = \mathbb{R}^d$.
On peut toutefois esquisser une forme d'inclusion réciproque en se restreignant aux distributions à support compact et on considérant des enveloppes convexes. Si $A \subset \mathbb{R}^d$, on note $\mathcal{C}(A)$ son enveloppe convexe, c'est à dire le plus petit ensemble convexe de $\mathbb{R}^d$ qui contient A. On a alors le résultat suivant.

Proposition 9.3.6. *Soient $T, S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$. Alors,*

$$\mathcal{C}(\text{supp } (T \star S)) = \mathcal{C}(\text{supp } T) + \mathcal{C}(\text{supp } S).$$

Pour la démonstration de ce résultat, on renvoie à [3, Theorem 4.3.3, p107].

9.3.4 Convolution et translations

Nous allons montrer que la convolution commute avec les translations, ce qui est une propriété caractéristique de la convolution. Rappelons que pour $a \in \mathbb{R}^d$, on définit la translation par a par :

$$\tau_a: \begin{array}{ccc} \mathcal{F}(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}) & \to & \mathcal{F}(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}) \\ f & \mapsto & f(\cdot - a) \end{array}.$$

Alors, pour $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ et $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, on pose :

$$< \tau_a T, \varphi >=< T, \tau_a \varphi > .$$

On a alors la propriété simple suivante :

$$\forall a \in \mathbb{R}^d,\ \forall T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d),\ \delta_a \star T = \tau_a T.$$

Proposition 9.3.7. *Soient $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ et $a \in \mathbb{R}^d$. Alors,*

$$\tau_a(T \star S) = (\tau_a T) \star S = T \star (\tau_a S).$$

Démonstration : Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. On a

$$\begin{aligned} < \tau_a(T \star S), \varphi > &= < T \star S, \tau_a \varphi > \\ &= < T \otimes S, (\tau_a \varphi)^\Delta > \\ &= < T_y \otimes S_z, \varphi(y + z - a) > \\ &= < T_y \otimes S_z, \varphi(y + (z - a)) > \\ &= < T_y \otimes (\tau_a S_z), \varphi(y + z) > \\ &= < T \star (\tau_a S), \varphi > . \end{aligned}$$

On a aussi

$$\begin{aligned} < T_y \otimes S_z, \varphi(y+z-a) > &= < T_y \otimes S_z, \varphi((y-a)+z) > \\ &= < (\tau_a T_y) \otimes S_z, \varphi(y+z) > \\ &= < (\tau_a T) \star S, \varphi > . \end{aligned} \tag{9.1}$$

D'où la double égalité voulue.

□

Comme dit plus haut, la convolution est caractérisée par cette propriété de commutation. Plus précisément, on peut énoncer le résultat démontré dans [1, Théorème 7.3.2, p139].

Théorème 9.3.8. *Soit U une application linéaire de $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ dans lui-même qui commute avec les translations,* i.e.,

$$\forall a \in \mathbb{R}^d,\ \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d),\ (U \circ \tau_a)(\varphi) = (\tau_a \circ U)(\varphi),$$

et qui vérifie la propriété de continuité suivante : pour tout compact $K \subset \mathbb{R}^d$, pour tout $p \in \mathbb{N}$, il existe un compact $L \subset \mathbb{R}^d$, il existe $q \in \mathbb{N}$ et $C > 0$ tels que

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d),\ \sup_{x\in K, |\alpha|\leq p} |\partial^\alpha (U\varphi)(x)| \leq C \cdot \sup_{x\in L, |\beta|\leq q} |\partial^\beta \varphi(x)|.$$

Alors, il existe une unique distribution $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ telle que

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d),\ U\varphi = T \star \varphi.$$

Ce théorème justifie l'interprétation physique de la convolution que nous avions faite au chapitre 6.

9.3.5 Comment calculer un produit de convolution

Nous avons vu la définition d'un produit de convolution et les différentes propriétés de ce produit de convolution. Nous allons maintenant voir comment en pratique on peut calculer le produit de convolution de deux distributions suivant les situations.

Convolution de deux fonctions dans $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$

Si f et g sont deux fonctions dans $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$, alors on a $T_f \star T_g = T_{f\star g}$ avec

$$\forall x \in \mathbb{R}^d,\ (f\star g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y) g(y) \mathrm{d}y.$$

Il s'agit là tout simplement du calcul fait en introduction de cette section.

Convolution d'une distribution et d'une fonction dans $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$

Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ et soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. Alors en notant aussi (abusivement) φ la distribution à support compact associée à φ, la distribution $T \star \varphi$ est donnée par la fonction de classe C^∞, $x \mapsto < T, \varphi(x - \cdot) >$.
En effet, soit $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. On a alors par définition du produit de convolution,

$$< T \star \varphi, \psi > = < T_y, < \varphi_z, \psi(y+z) >> = \left\langle T_y, \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x-y)\psi(x) \mathrm{d}x \right\rangle.$$

Comme la fonction $(x,y) \mapsto \varphi(x-y)\psi(x)$ est dans $C_0^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$, on peut appliquer le théorème d'intégration sous le crochet pour obtenir

$$< T \star \varphi, \psi >= \int_{\mathbb{R}^d} < T, \varphi(x-\cdot) > \psi(x)\mathrm{d}x =<< T, \varphi(x-\cdot) >, \psi > .$$

On précise que la fonction $x \mapsto < T, \varphi(x-\cdot) >$ est de classe C^∞ par le théorème de dérivation sous le crochet.
Remarque. Cette formule s'applique aussi si φ est seulement de classe C^∞ en supposant alors que $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$.

Utilisation des propriétés de la convolution

On peut par exemple utiliser l'approximation d'une des deux distributions par des fonctions de classe C^∞ ou C_0^∞ (comme on va le voir plus bas) et se ramener pour chaque terme de la suite au cas précédent. Parfois la suite approchante est suffisamment explicite pour permettre cette approche. On passe ensuite à la limite pour trouver la convolution des deux distributions.
On peut aussi utiliser les propriétés de dérivation de la convolution. Par exemple en dimension $d = 1$, si T est la dérivée de $\tilde{T}$, il peut être plus simple de calculer d'abord $\tilde{T} \star S$ et d'utiliser ensuite le fait que $T \star S = (\tilde{T} \star S)'$. Si au contraire il est plus simple de calculer $T' \star S$, on commence par faire ce calcul et alors on peut retrouver $T \star S$ à une constante près (par primitivation), constante que l'on pourra souvent déterminer à l'aide de la relation supp $(T \star S) \subset$ supp $(T) \star$ supp (S).

Exemple 9.3.9. *On veut calculer $\delta_0' \star \delta_0'$. On part de $\delta_0 \star \delta_0 = \delta_0$ et on dérive deux fois en faisant porter la dérivation une fois sur chaque terme pour obtenir que $\delta_0' \star \delta_0' = \delta_0''$.*

En désespoir de cause...

Si on est dans aucun des cas précédents, il s'agit alors d'appliquer directement la définition et de calculer un produit tensoriel.

Exemple 9.3.10. *On veut calculer $\delta_0' \star \delta_0'$. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Alors*

$$< \delta_0' \star \delta_0', \varphi >=< \delta_0' \otimes \delta_0', \varphi(y+z) >=< \delta_0', -\varphi'(y) >= \varphi''(0) =< \delta_0'', \varphi > .$$

9.3.6 Généralisation aux paires convolutives

Il n'est pas indispensable qu'une des deux distributions soit à support compact. En fait, tous les résultats énoncés sont encore vrais, quitte à en adapter les démonstrations, au cas où les supports de T et de S forment une paire convolutive de fermés au sens suivant.
On dit que deux fermés F et G de $\mathbb{R}^d$ sont convolutifs si, pour tout $R > 0$, il existe $\rho(R) > 0$ tel que

$$\forall x \in F, \forall y \in G,\ |x+y| \leq R \Rightarrow \max(|x|,|y|) \leq \rho(R).$$

Cela revient au fait que l'image réciproque de tout compact par l'application continue

$$s : \begin{array}{ccc} F \times G & \rightarrow & \mathbb{R}^d \\ (x,y) & \mapsto & x+y \end{array}$$

est un compact. On dit que l'application s est "propre".
Par exemple, le couple de fermés $([0,+\infty[, [0,+\infty[)$ est une paire convolutive (faire un dessin).
Par contre, $(]-\infty,0], [0,+\infty[)$ n'est pas convolutive.

9.4 Applications du produit tensoriel et de la convolution

9.4.1 Théorème de densité

Le résultat suivant est un résultat important de la théorie des distributions qui nous dit que finalement, même si on peut définir bien plus de distributions que de fonctions classiques, on peut tout de même approcher toute distribution par des fonctions test.

Théorème 9.4.1. *L'espace $C_0^\infty(\Omega)$ est dense dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ et dans $\mathcal{E}'(\Omega)$.*

Démonstration : On raisonne par troncature et régularisation. On commence par se donner une exhaustion de Ω par des compacts $(K_i)_{i\geq 1}$, puis des fonctions plateau $(\chi_i)_{i\geq 1}$ nulles hors de l'intérieur de K_{i+1} et valant 1 sur K_i. Soit ensuite $\theta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ telle que supp $\theta \subset B(0,1)$ et $\int \theta = 1$. On pose alors, pour tout $i \geq 1$, $\theta_i = i^n\theta(i\cdot)$. Pour i assez grand, supp (χ_i) + supp $\theta_i \subset \Omega$. D'autre part, $\chi_i T \in \mathcal{E}'(\Omega) \subset \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$. Posons

$$\forall i \geq 1,\ T_i = (\chi_i T) \star \theta_i.$$

Le terme $\chi_i T$ est dit de troncature et $\star\theta_i$ est le terme de régularisation. Alors $T_i \in C_0^\infty(\Omega)$ pour i assez grand car supp $T_i \subset$ supp χ_i + supp $\theta_i \subset \Omega$.

Il nous reste à montrer que $(T_i)_{i\geq 1}$ converge vers T dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Alors,

$$\forall i \geq 1,\ < T_i, \varphi >=< \chi_i T, < \theta_i, \varphi(y+z) >> .$$

Or, $< \theta_i, \varphi(y+z) >= \int \theta_i(z)\varphi(y+z)\mathrm{d}z = (\check{\theta}_i \star \varphi)(y)$ où $\check{\theta}_i(y) = \theta_i(-y)$. De là, $< T_i, \varphi >=< T, \chi_i(\check{\theta}_i \star \varphi) >$. Pour terminer de démontrer le théorème, il suffit donc de montrer que la suite $(\chi_i(\check{\theta}_i \star \varphi))_{i\geq 1}$ converge vers φ dans $C_0^\infty(\Omega)$.

Pour i_0 assez grand, on a, pour tout $i \geq i_0$,

$$\text{supp } (\check{\theta}_i \star \varphi) \subset \text{supp } \varphi + B(0,1/i) \subset \text{supp } \varphi + \overline{B(0,1/i_0)} := K.$$

Alors $K \subset \Omega$ est un compact indépendant de i. Si i est assez grand, l'un des K_i (et donc les suivants aussi) contient K. D'où, pour i assez grand, $\chi_i = 1$ sur K. Ainsi on a

$$\text{supp } (\chi_i(\check{\theta}_i \star \varphi)) \subset \text{supp } (\check{\theta}_i \star \varphi) \subset K.$$

Il nous reste à montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$, $(\partial^\alpha(\check{\theta}_i \star \varphi))_{i\geq 1}$ converge uniformément vers $\partial^\alpha\varphi$ sur K. Soit $i \geq i_0$. On a

$$\forall x \in \mathbb{R}^d,\ (\check{\theta}_i \star (\partial^\alpha\varphi))(x) - \partial^\alpha\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \theta_i(-z)\partial^\alpha\varphi(x-z)\mathrm{d}z - \left(\int_{\mathbb{R}^d} \theta_i(-z)\mathrm{d}z\right)\partial^\alpha\varphi(x).$$

On pose $y = -iz$ dans les intégrales pour obtenir :

$$\forall x \in \mathbb{R}^d,\ (\check{\theta}_i \star (\partial^\alpha\varphi))(x) - \partial^\alpha\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \theta(y)\left(\partial^\alpha\varphi\left(x + \frac{1}{i}y\right) - \partial^\alpha\varphi(x)\right)\mathrm{d}y.$$

D'où, par les accroissements finis,

$$\forall x \in \mathbb{R}^d,\ \left|(\check{\theta}_i \star (\partial^\alpha\varphi))(x) - \partial^\alpha\varphi(x)\right| \leq \frac{1}{i}\sum_{k=1}^{d} \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |\partial_{x_k}\partial^\alpha\varphi(x)| \int_{\mathbb{R}^d} |y_k| \cdot |\theta(y)|\mathrm{d}y \leq \frac{C}{i}.$$

Donc,

$$\sup_{x\in K}\left|(\check{\theta}_i \star (\partial^\alpha\varphi))(x) - \partial^\alpha\varphi(x)\right| \leq \frac{C}{i} \xrightarrow[i\to\infty]{} 0.$$

La preuve dans le cas où $T \in \mathcal{E}'(\Omega)$ est en tout point analogue.

□

9.4.2 Structure locale des distributions

Théorème 9.4.2. *Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Alors T est une somme localement finie de dérivées de fonctions continues,* i.e.*, pour tout compact $K \subset \Omega$,*

$$\exists k \in \mathbb{N},\ \forall |\alpha| \leq k,\ \exists f_\alpha \in C^0(\Omega),\ \forall \varphi \in C_0^\infty(K),\ < T, \varphi >= \sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\mathbb{R}^d} f_\alpha(x) \partial^\alpha \varphi(x) \mathrm{d}x.$$

Lorsque T est d'ordre fini, l'entier k ne dépend pas du choix du compact K. Enfin, si $T \in \mathcal{E}'(\Omega)$, alors T est une somme finie de dérivées de fonctions continues à support compact dans Ω.

Démonstration : On commence par écrire $T = \sum_{j \in J} \chi_j T$ avec J fini et $(\chi_j)_{j \in J}$ une partition de l'unité associé à K. Comme, pour tout $j \in J$, $\chi_j T \in \mathcal{E}'(\Omega)$, elle est d'ordre fini k_j. Soit alors

$$P_j = \partial_{x_1}^{k_j+2} \cdots \partial_{x_d}^{k_j+2} \quad \text{et} \quad E_j = \left(\frac{x_1^{k_j+1} H(x_1)}{(k_j+1)!} \right) \otimes \cdots \otimes \left(\frac{x_d^{k_j+1} H(x_d)}{(k_j+1)!} \right).$$

Alors, $E_j \in C^{k_j}(\Omega)$ et $P_j E_j = \delta_0$. D'où, en posant $f_j = E_j \star (\chi_j T)$,

$$P_j f_j = (P_j E_j) \star (\chi_j T) = \chi_j T.$$

Soit encore $\partial^{\alpha_j} f_j = \chi_j T$ où $\alpha_j = (k_j+2, \ldots, k_j+2)$. Comme $\chi_j T$ est compacte d'ordre k_j et que $E_j \in C^{k_j}(\Omega)$, on a $f_j \in C^0(\Omega)$. De plus,

$$< T, \varphi >= \sum_{j \in J} (-1)^{|\alpha_j|} < f_j, \partial^{\alpha_j} \varphi >,$$

ce qui démontre le résultat voulu.

□

Exemple 9.4.3. *On a, dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, $\delta_0 = (xH)''$. Soit alors $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ égale à 1 dans un voisinage de zéro. On a $\delta_0 = \chi \delta_0$. Alors, par la formule de Leibniz, pour tout $k \geq 0$ et toute $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, on a*

$$\chi \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k} T = \sum_{l=0}^{k} \frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}x^l} (\chi_l T), \text{ avec } \chi_l \in C_0^\infty(\mathbb{R}).$$

D'où :

$$\delta_0 = \chi \delta_0 = \sum_{l=0}^{2} \frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}x^l} (\chi_l x H).$$

9.4.3 Le théorème du noyau de Schwartz

Toute fonction $K \in C(\Omega_1 \times \Omega_2)$ définit un operateur intégral $\mathcal{K}$ de $C_0(\Omega_2)$ dans $C(\Omega_1)$ par la formule

$$\forall \varphi \in C_0(\Omega_2),\ \forall x \in \Omega_1,\ (\mathcal{K}\varphi)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} K(x,y) \varphi(y) \mathrm{d}y.$$

Nous allons voir à présent comment étendre cette définition au cadre des distributions. Tout d'abord, on remarque que, lorsque $K \in C(\Omega_1 \times \Omega_2)$,

$$\forall \psi \in C_0^\infty(\Omega_1),\ \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega_2),\ < \mathcal{K}\varphi, \psi >= K(\psi \otimes \varphi). \tag{9.2}$$

Théorème 9.4.4. *Toute distribution* $K \in \mathcal{D}'(\Omega_1 \times \Omega_2)$ *définit via (9.2) une application linéaire* $\mathcal{K} : C_0^\infty(\Omega_2) \to \mathcal{D}'(\Omega_1)$ *qui est continue dans le sens suivant : si* $\psi_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ *dans* $C_0^\infty(\Omega_2)$*, alors* $\mathcal{K}\psi_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ *dans* $\mathcal{D}'(\Omega_1)$.
Réciproquement, si $\mathcal{K} : C_0^\infty(\Omega_2) \to \mathcal{D}'(\Omega_1)$ *est une application linéaire qui est continue au sens précédent, il existe une unique distribution* $K \in \mathcal{D}'(\Omega_1 \times \Omega_2)$ *telle que (9.2) soit satisfaite. Dans ce cas, on appelle* K *le noyau de l'application* $\mathcal{K}$.

Pour la démonstration de ce théorème difficile, on renvoie à [3, Theorem 5.2.1, p128].

Exemple 9.4.5. *Le noyau de l'application identité* $\mathcal{K} : C_0^\infty(\Omega) \to C_0^\infty(\Omega)$ *pour* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^d$ *est la distribution* K *donnée par :*

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega \times \Omega),\ < K, \varphi >= \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x,x)\mathrm{d}x$$

dont le support est la diagonale, $\{(x,x) \in \Omega \times \Omega |\ x \in \Omega\}$.

Exemple 9.4.6. *Plus généralement, si* $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ *est une fonction continue, le noyau de l'application*

$$\mathcal{K} : \begin{array}{ccc} C_0^\infty(\Omega_2) & \to & C_0^\infty(\Omega_1) \\ \psi & \mapsto & \psi \circ f \end{array},$$

est la distribution K *donnée par :*

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega_1 \times \Omega_2),\ < K, \varphi >= \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x, f(x))\mathrm{d}x$$

dont le support est le graphe de f.

Chapitre 10

Solutions élémentaires d'EDPs II

10.1 Théorèmes d'existence

10.1.1 Définition et premières propriétés

Définition 10.1.1. *Une équation de convolution est une équation de la forme $A \star T = F$ où A et F sont des distributions données et où T est une distribution inconnue.*

Citons plusieurs exemples de telles équations.

1. Les EDPs linéaires à coefficients constants :
$$\sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \partial^\alpha T = F, \ a_\alpha \in \mathbb{C}.$$
En effet il suffit de prendre $A = \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} a_\alpha \partial^\alpha \delta_0$.
2. Des équations aux différences finies. Par exemple, en dimension 1, l'équation $u(x+h) - u(x) = f(x)$ se met sous la forme voulue avec $A = \delta_{-h} - \delta_0$ et $T = T_u$, $F = T_f$.
3. Des équations intégrales du type $\int k(x-y)u(y)\mathrm{d}y = f(x)$.
4. Des combinaisons linéaires des cas précédents : EDPs avec retard, équations intégro-différentielles...

Dans la suite nous allons nous restreindre essentiellement au cas où $A \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$.

Définition 10.1.2. *Soit $A \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$. On dit qu'une distribution $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ est une solution élémentaire de A (ou encore une "fonction de Green") lorsque $A \star E = \delta_0$.*

Il n'existe pas toujours de solution élémentaire, par exemple si $A \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, A n'en possède jamais (pour des questions de régularité).

Si A possède une solution élémentaire, on obtient toutes les autres en ajoutant à E une solution quelconque S de l'équation homogène $A \star S = 0$.

10.1.2 Existence de solutions

Nous pouvons énoncer tout d'abord un théorème d'existence de solution pour des équations de convolution pour des distributions A possédant une solution élémentaire.

Proposition 10.1.3. *Soit $A \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ possédant une solution élémentaire E.*

1. *Pour toute $F \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$, il existe au moins une solution de $A \star T = F$ appartenant à $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ et $T = E \star F$ en est une.*

2. *Pour tout $F \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$, il existe au plus une solution de $A \star T = F$ appartenant à $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ et, s'il en existe une, c'est $E \star T$.*

Démonstration : En effet, les supports de A et de F étant compacts, on peut écrire :

$$A \star (E \star F) = (A \star E) \star F = \delta_0 \star F = F.$$

Cela démontre le premier point. Si on suppose ensuite que T est une solution à support compact, on peut utiliser l'associativité de la convolution pour avoir :

$$T = (A \star E) \star T = (E \star A) \star T = E \star (A \star T) = E \star F,$$

d'où la seconde assertion.

□

Pour appliquer le théorème précédent il nous faut savoir que A possède une solution élémentaire. Nous avons vu au chapitre 7 que cela est toujours le cas pour les EDPs linéaires à coefficients constants. C'est le théorème de Malgrange-Ehrenpreis.

10.2 Théorème de régularité

Nous allons maintenant démontrer le théorème de régularité des solutions d'une EDP à coefficients constants que nous avions admis au chapitre 7.

Théorème 10.2.1. *Soit $A = \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} a_\alpha \partial^\alpha \delta_0$ avec $a_\alpha \in \mathbb{C}$. Si A possède une solution élémentaire E qui est dans $C^\infty(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$ alors, pour tout ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ et pour toute $f \in C^\infty(\Omega)$, si $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ est une solution de $A \star T = T_f$, alors T est associée à une fonction dans $C^\infty(\Omega)$.*

Démonstration : Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ une solution de $A \star T = T_f$ et soit $x_0 \in \Omega$. On veut montrer que T est de classe C^∞ au voisinage de x_0. Soit $\chi \in C_0^\infty(\Omega)$ une fonction plateau au voisinage de x_0. On a alors $\chi T \in \mathcal{E}'(\Omega)$ et on peut considérer χT comme un élément de $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$. Alors, par associativité du produit de convolution, on a : $\chi T = E \star (A \star (\chi T))$. Comme χ vaut 1 au voisinage de x_0, par la formule de Leibniz, on a :

$$A \star (\chi T) = \chi(A \star T) + R = \chi T_f + R,$$

où $R \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ est un reste tel que $x_0 \notin \text{supp } R$. Le fait que R est à support compact provient de l'égalité $R = A \star (\chi T) - \chi(A \star T) = 0$, hors du support de χ.
On a alors,

$$\chi T = E \star (A \star (\chi T)) = E \star (\chi T_f) + E \star R.$$

Quitte à considérer par prolongement que $\chi f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, on a $E \star (\chi f) \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ par les propriétés de régularité de la convolution. Il nous reste à montrer que $E \star R$ est de classe C^∞ au voisinage de x_0. Soit $\theta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ une fonction plateau au voisinage de 0. Comme $x_0 \notin \text{supp } R$, on peut choisir θ de sorte que $x_0 \notin \text{supp } \theta + \text{supp } R$. De plus,

$$E \star R = (\theta E) \star R + ((1 - \theta)E) \star R$$

et $((1 - \theta)E) \star R \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ puisque $(1 - \theta)E \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ puisque par hyptohèse, $E \in C^\infty(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$. Soit enfin $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ dont le support est dans un voisinage suffisamment proche de x_0. Alors,

$$\text{supp } \varphi \cap \text{supp } ((\theta E) \star R) \subset \text{supp } \varphi \cap (\text{supp } \theta + \text{supp } R) = \emptyset,$$

de telle sorte que $(\theta E) \star R = 0$ dans un voisinage suffisamment proche de x_0. Cela termine la preuve.

□

10.3 Exemples de solutions élémentaires

10.3.1 Équation de la chaleur et modèle de Black-Scholes-Merton

L'opérateur de la chaleur $P = \partial_t - \Delta_x$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ admet pour solution élémentaire

$$E = \frac{H(t)}{(4\pi t)^{d/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}.$$

Pour simplifier les notations, nous allons le montrer pour $d = 1$. Tout d'abord,

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2,\ 0 \leq E(x,t) \leq \frac{H(t)}{\sqrt{4\pi t}} \ \text{ et } \ t \mapsto \frac{H(t)}{\sqrt{4\pi t}} \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2).$$

Donc $E \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2)$ et E définit une distribution sur $\mathbb{R}^2$ d'ordre 0. Un calcul de dérivées partielles nous conduit ensuite à l'égalité

$$\forall (t,x) \in \mathbb{R}^2,\ \partial_t E(x,t) = \partial^2_{xx} E(x,t).$$

Soit $\varepsilon > 0$ et soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$. Posons :

$$I_\varepsilon = -\int_{\mathbb{R}} \int_\varepsilon^{+\infty} E(x,t)\partial_t \varphi(x,t)\ \mathrm{d}t\mathrm{d}x \quad \text{ et } \quad J_\varepsilon = -\int_{\mathbb{R}} \int_\varepsilon^{+\infty} E(x,t)\partial^2_{xx}\varphi(x,t)\ \mathrm{d}t\mathrm{d}x.$$

Alors, par IPP à la première ligne, en utilisant l'égalité sur les dérivées partielles précédente à la deuxième ligne et deux IPP et Fubini à la troisième ligne, on obtient

$$\begin{aligned} I_\varepsilon &= -\int_{\mathbb{R}} -E(x,\varepsilon)\varphi(x,\varepsilon)\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}} \int_\varepsilon^{+\infty} \partial_t(E(x,t))\varphi(x,t)\ \mathrm{d}t\mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbb{R}} E(x,\varepsilon)\varphi(x,\varepsilon)\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}} \int_\varepsilon^{+\infty} \partial^2_{xx}(E(x,t))\varphi(x,t)\ \mathrm{d}t\mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbb{R}} E(x,\varepsilon)\varphi(x,\varepsilon)\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}} \int_\varepsilon^{+\infty} E(x,t)\partial^2_{xx}\varphi(x,t)\ \mathrm{d}t\mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbb{R}} E(x,\varepsilon)\varphi(x,\varepsilon)\mathrm{d}x - J_\varepsilon. \end{aligned} \tag{10.1}$$

D'où :

$$I_\varepsilon + J_\varepsilon = \int_{\mathbb{R}} E(x,\varepsilon)\varphi(x,\varepsilon)\mathrm{d}x.$$

En posant $y = \frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}$, on a $\mathrm{d}x = \sqrt{\varepsilon}\mathrm{d}y$ et

$$I_\varepsilon + J_\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\frac{y^2}{4}} \varphi(\sqrt{\varepsilon}y, \varepsilon)\mathrm{d}y.$$

Or, par convergence dominée, applicable puisque $\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{4}}\varphi(\sqrt{\varepsilon}y,\varepsilon) \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{-\frac{y^2}{4}}\varphi(0,0)$ lorsque ε tend vers 0 et

$$\left|\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{4}}\varphi(\sqrt{\varepsilon}y,\varepsilon)\right| \leq ||\varphi||_\infty \mathrm{e}^{-\frac{y^2}{4}} \ \text{ avec } y \mapsto ||\varphi||_\infty \mathrm{e}^{-\frac{y^2}{4}} \in L^1(\mathbb{R}),$$

$$I_\varepsilon + J_\varepsilon \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} \frac{\varphi(0,0)}{\sqrt{4\pi}} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\frac{y^2}{4}}\mathrm{d}y = \varphi(0,0).$$

Par ailleurs, puisque

$$(x,t) \mapsto \frac{H(t)}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \partial_t \varphi(x,t) \in L^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$$

on a

$$\lim_{\varepsilon \to 0} I_\varepsilon = -\int_{\mathbb{R}^2} \frac{H(t)}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \partial_t \varphi(x,t) \mathrm{d}t \mathrm{d}x.$$

De même,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} J_\varepsilon = -\int_{\mathbb{R}^2} \frac{H(t)}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \partial^2_{xx} \varphi(x,t) \mathrm{d}t \mathrm{d}x.$$

Le calcul suivant est à présent parfaitement justifié,

$$\begin{aligned} < (\partial_t - \partial^2_{xx})E, \varphi > &= - < E, (\partial_t + \partial^2_{xx})\varphi > \\ &= -\int_{\mathbb{R}^2} \frac{H(t)}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} (\partial_t + \partial^2_{xx})\varphi(x,t) \mathrm{d}t \mathrm{d}x \\ &= -\int_{\mathbb{R} \times]0,+\infty[} \frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}} (\partial_t + \partial^2_{xx})\varphi(x,t) \mathrm{d}t \mathrm{d}x \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0} I_\varepsilon + J_\varepsilon = \varphi(0,0) =< \delta_{(0,0)}, \varphi > . \end{aligned}$$

Donc, dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$, $(\partial_t - \partial^2_{xx})E = \delta_{(0,0)}$.

Nous allons maintenant faire le lien entre cette solution élémentaire de la chaleur et le modèle de Black-Scholes-Merton utilisé en mathématiques financières.
On appelle produit dérivé un contrat financier dont la valeur est basée sur la valeur d'un produit sous-jacent (en général une action). Typiquement, un produit dérivé donne le droit (mais pas l'obligation) à son possesseur d'acheter (call) ou de vendre (put) un produit financier à une date fixée (date de maturité) à un prix pré-déterminé (le strike). Etant donné que l'option confère à son possédant un droit sans obligation, elle a une certaine valeur. On pose :

— S la valeur du produit sous-jacent au temps t,
— V la valeur du produit dérivé au temps t,
— r le taux d'intérêt à risque nul, qui est la compensation pour le risque systémique qui ne peut être éliminé en détenant un portefeuille diversifié,
— σ la volatilité du produit sous-jacent qui est une mesure de l'ampleur des variations du cours du produit sous-jacent.

Alors, l'équation aux dérivées partielles de Black-Scholes-Merton qui donne V est :

$$\partial_t V + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \partial^2_{SS} V + rS\partial_S V - rV = 0.$$

Supposons que le produit dérivé est une option "call" (on parle de "call européen" si le souscripteur peut exercer son droit uniquement à la date de maturité et de " call américain" s'il peut l'exercer à tout moment avant la date de maturité) - (ce type de produit s'applique à des sous-jacents dont on anticipe une hausse du prix comme par exemple du kérosène pour une compagnie aérienne...). La valeur du "call" est notée C, la date de maturité est notée T et le strike K. On considère les conditions aux bords pour un call européen :

$$C(S,T) = \max(0, S-K), \quad C(0,t) = 0, \quad C(S,t) \sim S \text{ pour } S \text{ grand.}$$

De même, pour une option de vente ou "put" on note P la valeur du put et on se donne, pour un put européen :

$$P(S,T) = \max(0, K-S), \quad P(0,t) = Ke^{-r(T-t)}, \quad P(S,t) \to 0 \text{ pour } S \text{ grand.}$$

On effectue un premier changement de variables :

$$S = Ke^x, \quad t = T - \frac{\tau}{\frac{1}{2}\sigma^2}, \quad C = Kv(x,\tau).$$

Alors l'équation de Black-Scholes-Merton devient, avec $k = \frac{r}{\frac{1}{2}\sigma^2}$:

$$\partial_\tau v = \partial_{xx}^2 v + (k-1)\partial_x v - kv.$$

Puis, en posant $v = e^{\alpha x + \beta \tau} u(x,\tau)$ on obtient, pour $\alpha = -\frac{1}{2}(k-1)$ et $\beta = -\frac{1}{4}(k+1)^2$,

$$\partial_\tau u = \partial_{xx}^2 u,$$

avec comme conditions initiales $u(x,0) = u_0(x) = \max(0, e^{\frac{1}{2}(k+1)x} - e^{\frac{1}{2}(k-1)x})$ et comme conditions aux bords : $u(x,\tau) \to 0$ lorsque $x \to \pm\infty$. On s'est donc ramené à l'équation de la chaleur. Par ailleurs, on sait que l'on a, en résolvant l'équation de la chaleur,

$$u(x,\tau) = u_0(x) \star \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}} e^{-\frac{x^2}{4\tau}}.$$

En faisant les changements de variables dans le sens inverse pour revenir aux variables (S,t) on obtient

$$C(S,t) = S\mathcal{N}(d_1) - Ke^{-r(T-t)}\mathcal{N}(d_2)$$

où

$$\mathcal{N}(x) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{x}{\sqrt{2}}} e^{-t^2}\mathrm{d}t\right), \quad d_1 = \frac{\ln(S/K) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad \text{et} \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}.$$

10.3.2 Opérateur $\bar{\partial}$

L'opérateur $\bar{\partial} = \frac{1}{2}(\partial_x + \mathrm{i}\partial_y)$ définit sur $\mathbb{R}^2$ admet pour solution élémentaire $z \mapsto \frac{1}{\pi z}$. En particulier, les distributions holomorphes (*i.e.* les $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ telles que $\bar{\partial}T = 0$) sont les fonctions holomorphes usuelles.

On pose : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $f(x,y) = \frac{1}{x+\mathrm{i}y}$. On commence par remarquer que $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2)$ car dans $\mathbb{R}^d$, $x \mapsto ||x||^{-\alpha}$ est intégrable en 0 si et seulement si $\alpha < d$. Ainsi, on peut légitimement associer à f une distribution d'ordre 0.
Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$. On a

$$\begin{aligned}
< \bar{\partial} f, \varphi > &= \frac{1}{2} < \partial_x f, \varphi > + \frac{1}{2}\mathrm{i} < \partial_y f, \varphi > \\
&= -\frac{1}{2} < f, \partial_x \varphi > - \frac{1}{2}\mathrm{i} < f, \partial_y \varphi > \\
&= -\frac{1}{2} < f, \partial_x \varphi + \mathrm{i}\partial_y \varphi > \\
&= -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{x+\mathrm{i}y}(\partial_x\varphi + \mathrm{i}\partial_y\varphi)(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} \frac{x\partial_x\varphi + y\partial_y\varphi}{x^2+y^2}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \frac{\mathrm{i}}{2}\int_{\mathbb{R}^2} \frac{x\partial_y\varphi - y\partial_x\varphi}{x^2+y^2}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

On pose alors $\tilde{\varphi}(r,\theta) = \varphi(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$, $x = r\cos(\theta)$ et $y = r\sin(\theta)$. On a :

$$\partial_r \tilde{\varphi}(r,\theta) = \partial_r \varphi(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) = \cos\theta\partial\varphi(x,y) + \sin\theta\partial_y\varphi(x,y) = \frac{1}{r}x\partial_x\varphi(x,y) + y\partial_y\varphi(x,y)$$

et

$$\partial_\theta \tilde{\varphi}(r,\theta) = \partial_\theta \varphi(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) = -r\sin\theta \partial_x \varphi(x,y) + r\cos\theta \partial_y \varphi(x,y) = x\partial_y \varphi(x,y) - y\partial_x \varphi(x,y).$$

D'où, par changement de variables en polaires,

$$< \bar{\partial} f, \varphi >= -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^\infty \frac{1}{r^2} r\partial_r \tilde{\varphi}(r,\theta) r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta - \frac{\mathrm{i}}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^\infty \frac{1}{r^2}\partial_\theta \tilde{\varphi}(r,\theta) r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Alors

$$-\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_\varepsilon^\infty \frac{1}{r^2} r\partial_r \tilde{\varphi}(r,\theta) r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \tilde{\varphi}(\varepsilon,\theta)\mathrm{d}\theta$$

et

$$-\frac{\mathrm{i}}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^\infty \frac{1}{r^2} r\partial_\theta \tilde{\varphi}(r,\theta) r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = -\frac{\mathrm{i}}{2}\int_\varepsilon^\infty \frac{1}{r}(\tilde{\varphi}(r,2\pi) - \tilde{\varphi}(r,0))\mathrm{d}r = 0.$$

Or, comme f est intégrable au voisinage de $(0,0)$,

$$< \bar{\partial} f, \varphi >= \lim_{\varepsilon\to 0} -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_\varepsilon^\infty \frac{1}{r^2} r\partial_r \tilde{\varphi}(r,\theta) r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta - \frac{\mathrm{i}}{2}\int_0^{2\pi}\int_\varepsilon^\infty \frac{1}{r^2}\partial_\theta \tilde{\varphi}(r,\theta) r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

et ainsi

$$< \bar{\partial} f, \varphi >= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \tilde{\varphi}(\varepsilon,\theta)\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \varphi(0,0)\mathrm{d}\theta = \pi\varphi(0,0),$$

car on peut appliquer ici le TCD puisque $\theta \mapsto |\tilde{\varphi}(\varepsilon,\theta)|$ est bornée, donc intégrable sur $[0,2\pi]$, et $\tilde{\varphi}(\varepsilon,\theta) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \varphi(0,0)$. Finalement,

$$< \bar{\partial} f, \varphi >= \pi\varphi(0,0) =< \pi\delta_0, \varphi >,$$

soit encore : $\bar{\partial} f = \pi\delta_0$.

10.4 Support singulier d'une distribution

Définition 10.4.1. *Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. On dit que $x \in \Omega$ n'est pas dans le support singulier de T lorsqu'il existe un voisinage V de x tel que $T|_V$ soit la distribution associée à une fonction C^∞. On note le support singulier de T,* $\mathrm{suppsing}(T)$. *On a donc*

$$\mathrm{suppsing}(T) = \left(\{x \in \Omega,\ \exists V \in V(x_0),\ \exists f \in C^\infty(V),\ T|_V = T_f\}\right)^c.$$

Proposition 10.4.2. *Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$.*

1. *Le support singulier d'une distribution est un ensemble fermé.*
2. $\mathrm{suppsing}(T) = \emptyset \Leftrightarrow \exists f \in C^\infty(\Omega),\ T = T_f$.
3. $\mathrm{suppsing}(T) \subset \mathrm{supp}\ T$.
4. *Soit $f \in C^\infty(\Omega)$. Alors,* $\mathrm{suppsing}(fT) \subset \mathrm{suppsing}(T) \cap \mathrm{supp}\ f$ *et* $\mathrm{suppsing}(T + T_f) = \mathrm{suppsing}(T)$.
5. *Pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$,* $\mathrm{suppsing}(\partial^\alpha T) \subset \mathrm{suppsing}(T)$.
6. *En particulier, pour tout $P \in \mathbb{C}[X_1, \dots X_d]$,* $\mathrm{suppsing}(P(\partial)T) \subset \mathrm{suppsing}(T)$.

Démonstration : Comme le fait d'être C^∞ au voisinage d'un point est une notion ouverte, le complémentaire de $\mathrm{suppsing}(T)$ est un ouvert, donc $\mathrm{suppsing}(T)$ est un fermé.

Le second point découle directement de la définition et du fait que le caractère C^∞ pour une fonction est une notion locale.

Si $x_0 \notin \mathrm{supp}\ T$, alors T est nulle au voisinage de x_0 donc est associée à la fonction nulle qui est C^∞ et $x_0 \notin \mathrm{suppsing}(T)$.

Comme $f \in C^\infty(\Omega)$, il est clair que $T + T_f$ est associée à une fonction C^∞ si et seulement si T l'est. D'où la seconde égalité du point 4. Pour la première inclusion, soit $x_0 \in \mathrm{suppsing}(T)^c \cup (\mathrm{supp}\ f)^c$. Si $x_0 \in \mathrm{suppsing}(T)^c$ alors T est associée à une fonction g de classe C^∞ au voisinage de x_0 et fT est alors associée à la fonction fg qui est de classe C^∞ au voisinage de x_0. Donc $x_0 \in \mathrm{suppsing}(fT)^c$. Si $x_0 \in (\mathrm{supp}\ f)^c$ alors f est nulle au voisinage de x_0, fT l'est aussi et on a encore $x_0 \in \mathrm{suppsing}(fT)^c$.

Pour $i \in \{1, \dots, d\}$, si T est associée à une fonction g de classe C^∞ au voisinage de x_0, alors $\partial_{x_i} T$ est associée à $\partial_{x_i} g$ qui est encore de classe C^∞ au voisinage de x_0, donc en passant au complémentaire, $\mathrm{suppsing}(\partial_{x_i} T) \subset \mathrm{suppsing}(T)$. On en déduit le point 5 par récurrence et le point 6 par linéarité.

□

L'inclusion réciproque dans 6 est fausse en général comme le montre l'exemple suivant. Soit $\Omega = \mathbb{R}^2$ et soit $P = X_1$ auquel est associé $P(\partial) = \partial_{x_1}$. Soit $T = \mathbb{1}_{x_1} \otimes H$ où H est la distribution de Heaviside. Alors $T = 1$ pour $x_2 > 0$ et $T = 0$ pour $x_2 < 0$. Donc $\mathrm{suppsing}(T)$ est exactement l'axe des abscisses, mais
$$\partial_{x_1} T = (\partial_{x_1} \mathbb{1}_{x_1}) \otimes H = 0 \otimes H = 0$$
et $\mathrm{suppsing}(P(\partial)T) = \emptyset$. Donc $\mathrm{suppsing}(T) \not\subset \mathrm{suppsing}(P(\partial)T)$.

Cette remarque nous conduit à définir les opérateurs différentiels à coefficients constants pour lesquels l'inclusion inverse dans 6 est vraie.

Définition 10.4.3. *Soit $P \in \mathbb{C}[X_1, \dots X_d]$. On dit que $P(\partial)$ est hypoelliptique sur Ω lorsque*
$$\forall T \in \mathcal{D}'(\Omega),\ \mathrm{suppsing}(T) = \mathrm{suppsing}(P(\partial)T).$$

On remarque que si $P(\partial)$ est hypoelliptique sur $\mathbb{R}^d$ et si $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ est une solution élémentaire de $P(\partial)$, alors
$$\mathrm{suppsing}(E) = \mathrm{suppsing}(P(\partial)E) = \mathrm{suppsing}(\delta_0) = \{0\}.$$

Ainsi, E est associée à une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$. Le théorème de régularité 7.2.1 vu au chapitre 7 est essentiellement la réciproque de cette propriété et peut être écrit de la façon suivante.

Proposition 10.4.4. *Soit $P(\partial)$ un opérateur différentiel à coefficients constants sur $\mathbb{R}^d$. Si P admet une solution élémentaire E associée à une fonction dans $C^\infty(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$, alors $P(\partial)$ est hypoelliptique sur $\mathbb{R}^d$.*

Démonstration : Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ et soit $x_0 \notin \mathrm{suppsing}(P(\partial)T)$. Il existe un voisinage V de x_0 tel que la restriction de $P(\partial)T$ à V soit associée à une fonction C^∞. Alors, le Theorème 7.2.1 affirme que la restriction à V de T est associée à une fonction C^∞ et $x_0 \notin \mathrm{suppsing}(T)$. D'où, $\mathrm{suppsing}(T) \subset \mathrm{suppsing}(P(\partial)T)$.

□

Le support singulier d'une convolution vérifie la même inclusion que pour le support.

Proposition 10.4.5. *Soient T_1 et T_2 dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ dont les supports forment une paire convolutive. Alors,*

$$\text{suppsing}(T_1 \star T_2) \subset \text{suppsing}(T_1) + \text{suppsing}(T_2).$$

Démonstration : Pour simplifier, supposons que T_1 et T_2 sont dans $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$. Alors, comme fermés inclus dans les supports respectivement de T_1 et T_2 qui sont compacts, suppsing(T_1) et suppsing(T_2) sont des compacts. Il existe donc deux fonctions plateaux $\chi_{i,\varepsilon} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ qui valent 1 sur suppsing$(T_i) + \overline{B}(0, \varepsilon/2)$ et supportées dans suppsing$(T_i) + B(0, \varepsilon)$. Alors,

$$T_1 \star T_2 = ((\chi_{1,\varepsilon} + 1 - \chi_{1,\varepsilon})T_1) \star ((\chi_{2,\varepsilon} + 1 - \chi_{2,\varepsilon})T_2) = (\chi_{1,\varepsilon}T_1) \star (\chi_{2,\varepsilon}T_2) + R$$

où R est associée à une fonction dans $C^\infty(\mathbb{R}^d)$. De là,

$$\begin{aligned}
\text{suppsing}(T_1 \star T_2) &\subset \text{suppsing}((\chi_{1,\varepsilon}T_1) \star (\chi_{2,\varepsilon}T_2)) \\
&\subset \text{supp}\ ((\chi_{1,\varepsilon}T_1) \star (\chi_{2,\varepsilon}T_2)) \\
&\subset \text{supp}\ (\chi_{1,\varepsilon}T_1) + \text{supp}\ (\chi_{2,\varepsilon}T_2) \\
&\subset \text{supp}\ (\chi_{1,\varepsilon}) + \text{supp}\ (\chi_{2,\varepsilon}) \\
&\subset \text{suppsing}(T_1) + B(0,\varepsilon) + \text{suppsing}(T_2) + B(0,\varepsilon) \\
&\subset \text{suppsing}(T_1) + \text{suppsing}(T_2) + B(0, 2\varepsilon).
\end{aligned}$$

On obtient le résultat voulu en faisant tendre ε vers 0 et en utilisant le fait que le support singulier est un fermé.

□

Exemple 10.4.6. *Nous reprenons les opérateurs différentiels à coefficients constants classiques de la physique et nous discutons de leur hypoellipticité.*

1. *Le Laplacien admet une solution élémentaire de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ donc est hypoelliptique.*
2. *L'opérateur de la chaleur l'est aussi pour la même raison.*
3. *L'opérateur $\bar{\partial}$ l'est aussi et en particulier, les distributions holomorphes (*i.e.* telles que $\bar{\partial}T = 0$) sont associées aux fonctions holomorphes usuelles.*
4. *L'opérateur ∂_{x_1} dans $\mathbb{R}^2$ n'est pas hypoelliptique.*
5. *L'opérateur des ondes en 1D n'est pas non plus hypoelliptique. En effet, si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est de classe C^2 mais pas de classe C^∞, on a alors $P(\partial)(f(t \pm x)) = 0$ donc $(x, t) \mapsto f(t \pm x)$ est solution de l'équation des ondes sans être de classe C^∞. Pourtant le second membre étant la fonction nulle, il est bien de classe C^∞. On retrouve le fait que la solution élémentaire trouvée au chapitre 7 pour cette EDP n'était pas C^∞ au voisinage de tout point dans $\{(x, t) \in \mathbb{R}^2,\ x = |t|\}$.*

Chapitre 11

Formule des sauts

11.1 Formule des sauts en dimension 1

Avant de traiter le cas compliqué, envisageons le cas de la dimension 1 d'espace. On se donne ainsi une fonction f, qui est de classe C^1 par morceaux dans $[a,b]$, et qui admet, en tout point où elle n'est pas continue, une limite à droite et une limite à gauche. Il existe ainsi une subdivision de $[a,b]$ en intervalles $[a,a_1[,]a_i,a_{i+1}[,]a_{i+1},b]$ telle que f soit de classe C^1 sur $]a_i,a_{i+1}[$. On note $f(a_i^+)$ et $f(a_i^-)$ les limites respectives à droite et à gauche au point a_i. Par convention, les points intérieurs à $[a,b]$ sont $a_1,..,a_n$ et on note $a_0 = a, a_{n+1} = b$. La fonction f définit une distribution, dont on calcule la dérivée, que nous notons $(T_f)'$. Par définition, pour $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$,

$$< (T_f)', \varphi >= - < T_f, \varphi' >= - \int_a^b f(x)\varphi'(x)dx.$$

Ainsi

$$\int_a^b f(x)\varphi'(x)dx = \sum_{i=0}^{n} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x)\varphi'(x)dx.$$

Comme

$$\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x)\varphi'(x)dx = \varphi(a_{i+1})f(a_{i+1}^-) - \varphi(a_i)f(a_i^+) - \int_{a_i}^{a_{i+1}} f'(x)\varphi(x)dx,$$

où la fonction f' est définie presque partout, on a la relation

$$-\int_a^b f(x)\varphi'(x)dx = \sum_{i=0}^{n} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f'(x)\varphi(x)dx + \sum_{i=0}^{n} f(a_i^+)\varphi(a_i) - f(a_{i+1}^-)\varphi(a_{i+1}).$$

Soit, en notant $T_{f'}$ la distribution définie par f' sur chaque intervalle $]a_i, a_{i+1}[$

$$< (T_f)', \varphi >=< T_{f'}, \varphi > +(f(a^+) - 0) < \delta_a, \varphi > +(0 - f(b^-)) < \delta_b, \varphi > + \sum_{i=1}^{n} (f(a_i^+) - f(a_i^-)) < \delta_{a_i}, \varphi > .$$

On a ainsi démontré le théorème suivant.

Théorème 11.1.1. *La distribution $(T_f)'$ est donnée, à partir de $T_{f'}$ et des sauts de f, par*

$$(T_f)' = T_{f'} + \sum_{i=0}^{n+1} (f(a_i^+) - f(a_i^-))\delta_{a_i}.$$

avec les conventions $a_0 = a, a_{n+1} = b$, $f(a_0^-) = 0$, $f(a_{n+1}^+) = 0$.

Ce résultat s'étend aux dérivées successives, comme pour la dérivée seconde, en considérant les sauts de f et de la dérivée de f :

$$(T_f)'' = T_{f''} + \sum_{i=0}^{n+1} (f(a_i^+) - f(a_i^-))\delta'_{a_i} + \sum_{i=0}^{n+1} (f'(a_i^+) - f'(a_i^-))\delta_{a_i}.$$

On en déduit aussi la proposition :

Proposition 11.1.2. *Soit u une fonction C^1 définie sur un intervalle $[a,b]$. On la prolonge par 0 à l'extérieur de $[a,b]$ et on note le prolongement $\underline{u}$. De même, on note $\underline{u}'$ le prolongement de la fonction u', défini par u' sur $]a,b[$ et par 0 à l'extérieur. Alors*

$$(T_{\underline{u}})' = T_{\underline{u}'} + u(a)\delta_a - u(b)\delta_b.$$

Cette proposition est le cas particulier où la fonction u est de classe C^1 par morceaux d'un résultat plus général.

Proposition 11.1.3. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $g \in C(I)$, telle que sa dérivée au sens des distributions g' vérifie $g' \in L^1_{loc}(I)$. Si $a, b \in I$, $a < b$, alors :*

$$(T_{g1_{[a,b]}})' = T_{g'1_{[a,b]}} + g(a)\delta_a - g(b)\delta_b.$$

Nous avons ainsi trouvé la dérivée d'un prolongement par 0 en dimension 1.

11.2 Formule des sauts pour un demi-espace

On se donne une fonction $u(x', x_d)$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}_+$, et on souhaite calculer la dérivée de la distribution définie par $\underline{u}$ qui vaut u sur $\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}_+$ et 0 sur $\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}_-$. On trouve ainsi

$$< \partial_{x_j}\underline{u}, \varphi >= - \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \int_0^\infty u(x', x_d)\partial_{x_j}\varphi(x', x_d)\mathrm{d}x_d\mathrm{d}x'$$

pour $1 \leq j \leq d$. Lorsque $j \neq d$, on a

$$\int_0^\infty u(x', x_d)\partial_{x_j}\varphi(x)\mathrm{d}x_d = \partial_{x_j}[\int_0^{+\infty} u(x', x_d)\varphi(x', x_d)\mathrm{d}x_d] - \int_0^{+\infty} \partial_{x_j}u(x', x_d)\varphi(x)\mathrm{d}x_d.$$

L'intégration du premier terme sur $\mathbb{R}$ dans la variable x_j donne 0 puisque φ est à support compact, ainsi on trouve, pour $j \neq d$

$$< \partial_{x_j}\underline{u}, \varphi >=< 1_{x_d \geq 0}\partial_{x_j}u, \varphi >$$

où on a noté par commodité $1_{x_d \geq 0}\partial_{x_j}u$ la distribution associée au prolongement par 0 sur $\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}_-$ de la fonction $\partial_{x_j}u$ définie sur $\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}_+^*$. Cette distribution est définie par l'action de la fonction $L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$, égale à $\partial_{x_j}u$ sur $\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}_+^*$ et à 0 sur $\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}_-^*$, sur la fonction de $L^\infty(\mathbb{R}^d)$ égale à $1_{x_d \geq 0}\varphi(x', x_d)$, $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$.
Lorsque $j = d$, on trouve

$$\begin{aligned} < \partial_{x_d}\underline{u}, \varphi > &= - \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \int_0^\infty u(x', x_d)\partial_{x_d}\varphi(x', x_d)\mathrm{d}x_d\mathrm{d}x' \\ &= \int_{\mathbb{R}^{d-1}} u(x', 0)\varphi(x', 0)\mathrm{d}x' + \int_{\mathbb{R}^{d-1}\times\mathbb{R}_+} \partial_{x_d}u(x)\varphi(x)\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Ainsi on obtient le résultat :

Proposition 11.2.1. *Soit u définie comme ci-dessus. Ses dérivées sont données par*

$$\forall j \in \{1, \dots d\},\ j \neq d,\ \partial_{x_j} \underline{u} = 1_{x_d \geq 0} \partial_{x_j} u$$

$$\text{et} \quad \partial_{x_d} \underline{u} = 1_{x_d \geq 0} \partial_{x_d} u + u(x', 0) \otimes \delta_{x_d = 0}.$$

La distribution $u(x', 0) \otimes \delta_{x_d=0}$ s'appelle distribution de simple couche. C'est une distribution de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, donnée par

$$< u(x', 0) \otimes \delta_{x_d=0}, \varphi >= \int_{\mathbb{R}^{d-1}} u(x', 0)\varphi(x', 0) \mathrm{d}x'.$$

11.3 Ouverts réguliers dans $\mathbb{R}^d$

11.3.1 Définition

Définition 11.3.1. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert et soit $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$. On dit que Ω est de classe C^k s'il existe une fonction $\rho \in C^k(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ telle que*

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^d,\ \rho(x) < 0\}$$

et, si $\partial\Omega$ désigne la frontière de Ω et $\nabla\rho(x)$ le gradient de ρ en x, alors

$$\partial\Omega = \{x \in \mathbb{R}^d,\ \rho(x) = 0 \text{ et } \nabla\rho(x) \neq 0\}.$$

Remarque 11.3.2. *Il n'y a pas a priori, pour un ouvert Ω de classe C^k, unicité du choix de la fonction ρ.*

Définition 11.3.3. *On appelle ouvert régulier de $\mathbb{R}^d$ tout ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ de classe C^∞.*

Cette définition assure en particulier que Ω est situé localement du même côté de sa frontière, propriété utile pour définir la normale extérieure à Ω en chaque point de $\partial\Omega$.

Exemple 11.3.4. *Pour $R > 0$, $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^d,\ |x| < R\}$ est un ouvert régulier. En effet, il suffit de prendre $\rho(x) = |x|^2 - R^2$. Il en est de même pour $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^d,\ |x| > R\}$.*

Exemple 11.3.5. *Soit $\psi : \mathbb{R}^{d-1} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^k. Posons*

$$\Omega = \{x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d,\ x_d > \psi(x_1, \dots, x_{d-1})\}.$$

Alors Ω est un ouvert de classe C^k avec $\rho((x_1, \dots, x_d)) = \psi(x_1, \dots, x_{d-1}) - x_d$.

11.3.2 Vecteur normal unitaire sortant

Pour un ouvert régulier de $\mathbb{R}^d$, la direction du vecteur $\nabla\rho(x)$ pour $x \in \partial\Omega$ ne dépend pas du choix de la fonction ρ pour définir Ω (voir [6], page 41). Cela conduit à la définition de vecteur normal unitaire sortant.

Définition 11.3.6. *Pour $x \in \partial\Omega$, le vecteur $\nabla\rho(x)$ s'appelle le vecteur normal sortant à Ω au point x. Le vecteur*

$$\nu(x) = \frac{\nabla\rho(x)}{||\nabla\rho(x)||}$$

s'appelle le vecteur normal unitaire sortant à Ω au point $x \in \partial\Omega$.

On peut définir une notion de dérivée normale extérieure à Ω en posant

$$\frac{\partial}{\partial \nu} = \left\langle \nu(x), \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle = \sum_{i=1}^{d} \nu_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Exemple 11.3.7. *Supposons que $\Omega =]0,1[\subset \mathbb{R}$. Alors Ω est un ouvert régulier de $\mathbb{R}$ en prenant $\rho(x) = x(x-1)$. On a, $\partial\Omega = \{0,1\}$, $\nu(0) = -1$ et $\nu(1) = 1$.*

Exemple 11.3.8. *Pour $r > 0$, soit $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^d \mid |x| < r\}$. L'ouvert Ω est un ouvert régulier et $\partial\Omega = S(0,r)$, la sphère centrée en 0 de rayon r de $\mathbb{R}^d$. Dans ce cas, pour $x \in S(0,r)$,*

$$\nu(x) = \left(\frac{x_1}{r}, \dots, \frac{x_d}{r}\right) \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial \nu} = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^{d} x_i \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Exemple 11.3.9. *Soit $\psi : \mathbb{R}^{d-1} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^∞. Posons*

$$\Omega = \{x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d,\ x_d > \psi(x_1, \dots, x_{d-1})\}.$$

Alors Ω est un ouvert régulier de $\mathbb{R}^d$ avec $\rho((x_1, \dots, x_d)) = \psi(x_1, \dots, x_{d-1}) - x_d$. De plus,

$$\partial\Omega = \{x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d,\ x_d = \psi(x_1, \dots, x_{d-1})\}$$

et

$$\forall x \in \partial\Omega,\ \nu(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla' \psi(x')|^2}} \begin{pmatrix} \partial_{x_1} \psi(x') \\ \vdots \\ \partial_{x_{d-1}} \psi(x') \\ -1 \end{pmatrix}$$

où $x' = (x_1, \dots, x_{d-1})$ et $\nabla' \psi$ désigne le gradient $d-1$ dimensionnel associé aux $d-1$ premières coordonnées de x, $(\partial_{x_1} \psi, \dots, \partial_{x_{d-1}} \psi) \in \mathbb{R}^{d-1}$. Par ailleurs, on a

$$\frac{\partial}{\partial \nu} = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla' \psi(x')|^2}} \left(\sum_{i=1}^{d-1} \partial_{x_i} \psi \partial_{x_i} - \partial_{x_d} \right).$$

11.3.3 Mesure de surface, exemples

Soit un ouvert régulier Ω dans $\mathbb{R}^d$. On désigne par $\mathbb{1}_\Omega$ la fonction caractéristique de Ω. Commençons par déterminer dans quel ensemble se situe le support de la distribution $\partial_{x_i} \mathbb{1}_\Omega$.

Proposition 11.3.10. *Pour tout $i \in \{1, \dots, d\}$,* supp $(\partial_{x_i} \mathbb{1}_\Omega) \subset \partial\Omega$.

Démonstration : Soit $x_0 \in \mathbb{R}^d \setminus \partial\Omega$. Soit $\delta > 0$ tel que

$$B_\infty(x_0, \delta) = \left\{ x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d,\ \max_{1 \le i \le d} |x_i| < \delta \right\} \subset \mathbb{R}^d \setminus \partial\Omega.$$

Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ telle que supp $\varphi \subset B_\infty(x_0, \delta)$. On a, pour tout $i \in \{1, \dots, d\}$,

$$< \partial_{x_i} \mathbb{1}_\Omega, \varphi >= - < \mathbb{1}_\Omega, \partial_{x_i} \varphi >= - \int_\Omega \partial_{x_i} \varphi \mathrm{d}x.$$

Si $x_0 \notin \Omega$, alors $B_\infty(x_0, \delta) \cap \Omega = \emptyset$ et l'intégrale précédente est nulle. Si $x_0 \in \Omega$, alors $B_\infty(x_0, \delta) \subset \Omega$ et par Fubini-Tonelli,

$$\begin{aligned} < \partial_{x_i} \mathbb{1}_\Omega, \varphi > &= -\int_{B_\infty(x_0,\delta)} \partial_{x_i} \varphi \mathrm{d}x \\ &= -\int \cdots \int \left(\int_{x_{0,i}-\delta}^{x_{0,i}+\delta} \partial_{x_i} \varphi(x) \mathrm{d}x_i \right) \mathrm{d}x' \\ &= -\int \cdots \int (0-0)\, \mathrm{d}x' = 0, \end{aligned}$$

puisque supp $\varphi \subset B_\infty(x_0, \delta)$. Dans les deux cas, $x_0 \notin$ supp $(\partial_{x_i} \mathbb{1}_\Omega)$. D'où l'inclusion voulue par passage au complémentaire.

□

Cette propriété nous conduit à poser la définition suivante.

Définition 11.3.11. *On appelle mesure de surface sur $\partial\Omega$, la mesure de Radon positive* $\mathrm{d}\sigma$ *définie par*

$$\mathrm{d}\sigma = -\frac{\partial}{\partial \nu} \mathbb{1}_\Omega.$$

On a alors,

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega), < \mathrm{d}\sigma, \varphi >= \int_{\partial\Omega} \varphi(x) \mathrm{d}\sigma(x).$$

Remarque. Plus généralement, pour g sommable par rapport à $\mathrm{d}\sigma$ sur $\partial\Omega$, on définit $g\mathrm{d}\sigma$ la distribution de simple couche par

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega), < g\mathrm{d}\sigma, \varphi >= \int_{\partial\Omega} g(x)\varphi(x) \mathrm{d}\sigma(x).$$

Exemple 11.3.12. *On reprend $\Omega =]0,1[$. Alors, comme $\nu(0) = -1$ et $\nu(1) = 1$, on a*

$$\begin{aligned} \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega), < \mathrm{d}\sigma, \varphi > &= \left\langle -\frac{\partial}{\partial \nu} \mathbb{1}_{]0,1[}, \varphi \right\rangle \\ &= < \mathbb{1}_{]0,1[}, (\nu\varphi)' > \\ &= \int_0^1 (\nu\varphi)'(x) \mathrm{d}x \\ &= \nu(1)\varphi(1) - \nu(0)\varphi(0) = \varphi(1) + \varphi(0) =< \delta_1 + \delta_0, \varphi > . \end{aligned}$$

Ainsi, $\mathrm{d}\sigma = \delta_0 + \delta_1$. C'est une somme de mesures de Dirac portées par $\{0\}$ et $\{1\}$.

Exemple 11.3.13. *Soit $\Omega = B(0,r)$. On a, pour $x = (x_1, \ldots x_d) \in S(0,r)$, $\nu(x) = (\frac{x_1}{r}, \ldots, \frac{x_d}{r})$. D'où, $\frac{\partial}{\partial \nu} = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^d x_i \partial_{x_i}$. Or, si $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, en passant en coordonnées polaires, $x = t\theta$ avec $t \in [0, r[$ et $\theta \in S^{d-1}$ la sphère unité de $\mathbb{R}^d$, alors,*

$$t\partial_t(\varphi(t\theta)) = \sum_{i=1}^d t\theta_i \partial_{x_i} \varphi(t\theta) = \sum_{i=1}^d x_i \partial_{x_i} \varphi(x).$$

Utilisons cette expression pour calculer dσ. *On a, pour toute* $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$,

$$\begin{aligned}
< \mathrm{d}\sigma, \varphi > &= \left\langle -\frac{1}{r}\sum_{i=1}^d x_i \partial_{x_i} \mathbb{1}_\Omega, \varphi \right\rangle = \frac{1}{r}\left\langle \mathbb{1}_\Omega, \sum_{i=1}^d \partial_{x_i}(x_i\varphi)\right\rangle \\
&= \frac{1}{r}\left\langle \mathbb{1}_\Omega, \sum_{i=1}^d (\varphi + x_i\partial_{x_i}\varphi)\right\rangle \\
&= \frac{d}{r}\int_{|x|<r}\varphi(x)\mathrm{d}x + \frac{1}{r}\int_{|x|<r}\sum_{i=1}^d x_i\partial_{x_i}\varphi(x)\mathrm{d}x \\
&= \frac{d}{r}\int_{|x|<r}\varphi(x)\mathrm{d}x + \frac{1}{r}\int_0^r\int_{S^{d-1}} t\partial_t(\varphi(t\theta))t^{d-1}\mathrm{d}t\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{d}{r}\int_{|x|<r}\varphi(x)\mathrm{d}x + \frac{1}{r}\int_{S^{d-1}}\left(\int_0^r \partial_t(\varphi(t\theta))t^d\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{d}{r}\int_{|x|<r}\varphi(x)\mathrm{d}x + \frac{1}{r}\int_{S^{d-1}}\left(\Big[\varphi(t\theta)t^d\Big]_0^r - \int_0^r \varphi(t\theta)\cdot dt^{d-1}\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{d}{r}\int_{|x|<r}\varphi(x)\mathrm{d}x + r^{d-1}\int_{S^{d-1}}\varphi(r\theta)\mathrm{d}\theta - \frac{d}{r}\int_0^r\int_{S^{d-1}}\varphi(t\theta)\cdot t^{d-1}\mathrm{d}t\mathrm{d}\theta \\
&= \int_{S^{d-1}}\varphi(r\theta)r^{d-1}\mathrm{d}\theta. \qquad (11.1)
\end{aligned}$$

Cette dernière égalité définit la mesure de surface dσ *sur la boule de centre* 0 *et de rayon* $r > 0$ *:*

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d),\ < \mathrm{d}\sigma, \varphi >= \int_{S^{d-1}}\varphi(r\theta)r^{d-1}\mathrm{d}\theta.$$

Exemple 11.3.14. *On reprend l'exemple de l'ouvert régulier*

$$\Omega = \{x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d,\ x_d > \psi(x_1, \dots, x_{d-1})\}.$$

où $\psi : \mathbb{R}^{d-1} \to \mathbb{R}$ *est une fonction de classe* C^∞. *Soit* $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. *Posons* $D(x') = \sqrt{1 + |\nabla'\psi(x')|^2}$. *Alors,*

$$< \mathrm{d}\sigma, \varphi >= \int_\Omega \sum_{i=1}^{d-1}\partial_{x_i}\left(\frac{1}{D(x')}(\partial_{x_i}\psi)\varphi(x)\right)\mathrm{d}x - \int_\Omega \partial_{x_d}\left(\frac{1}{D(x')}\varphi(x)\right)\mathrm{d}x := I_1 - I_2.$$

On a

$$I_1 = \sum_{i=1}^{d-1}\int_{\mathbb{R}^{d-1}}\int_{\psi(x')}^{+\infty}\partial_{x_i}\left(\frac{1}{D(x')}(\partial_{x_i}\psi)\varphi(x)\right)\mathrm{d}x_d\mathrm{d}x'$$

et

$$I_2 = \int_{\mathbb{R}^{d-1}}\int_{\psi(x')}^{+\infty}\partial_{x_d}\left(\frac{1}{D(x')}\varphi(x)\right)\mathrm{d}x_d\mathrm{d}x' = -\int_{\mathbb{R}^{d-1}}\frac{1}{D(x')}\varphi(x', \psi(x'))\mathrm{d}x'.$$

Or, pour $i \in \{1, \dots, d-1\}$ *et* $\theta \in C_0^\infty(\Omega)$,

$$\partial_{x_i}\int_{\psi(x')}^{+\infty}\theta(x', x_d)\mathrm{d}x_d = \int_{\psi(x')}^{+\infty}\partial_{x_i}\theta(x', x_d)\mathrm{d}x_d - (\partial_{x_i}\psi)\theta(x', \psi(x')).$$

On en déduit, en prenant $\theta : x \mapsto \frac{1}{D(x')}(\partial_{x_i}\psi)\varphi(x)$,

$$I_1 = \sum_{i=1}^{d-1}\int_{\mathbb{R}^{d-1}}\frac{1}{D(x')}(\partial_{x_i}\psi)^2\varphi(x', \psi(x'))\mathrm{d}x' + \sum_{i=1}^{d-1}\int_{\mathbb{R}^{d-1}}\partial_{x_i}\left(\int_{\psi(x')}^{+\infty}\frac{1}{D(x')}(\partial_{x_i}\psi)\varphi(x', \psi(x'))\mathrm{d}x_d\right)\mathrm{d}x'.$$

Comme φ est à support compact, elle est nulle pour $x_i = \pm\infty$, de sorte que le deuxième terme du membre de droite est nul. On en déduit :

$$< \mathrm{d}\sigma, \varphi >= I_1 - I_2 = \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \frac{1}{D(x')}(1 + |\nabla\psi(x')|^2)\varphi(x', \psi(x'))\mathrm{d}x'.$$

Finalement, on obtient la formule qui donne la mesure de surface sur $\partial\Omega$:

$$< \mathrm{d}\sigma, \varphi >= \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \varphi(x', \psi(x'))\sqrt{1 + |\nabla\psi(x')|^2}\mathrm{d}x'.$$

11.4 Formule de Stokes

11.4.1 Formule de Stokes

Nous commençons par préciser la proposition 11.3.10.

Proposition 11.4.1. *Soit Ω un ouvert régulier de $\mathbb{R}^d$ et soit ν le champ de vecteur normal sortant à Ω (*i.e.*, l'application $x \mapsto \nu(x)$). Si $\mathrm{d}\sigma$ désigne la mesure de surface sur $\partial\Omega$, alors, pour tout $i \in \{1, \dots d\}$,*

$$\nu_i \mathrm{d}\sigma = -\partial_{x_i} \mathbb{1}_\Omega.$$

Démonstration : Soit $\chi \in C^\infty(\mathbb{R})$ une fonction marche telle que $0 \leq \chi \leq 1$, $\chi(x) = 1$ si $x \leq -1$ et $\chi(x) = 0$ pour $x \geq 0$. Soit aussi $\rho \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ qui définit l'ouvert régulier Ω. Pour $\alpha > 0$, on pose

$$\forall x \in \mathbb{R}^d,\ \chi_\alpha(x) = \chi(\alpha\rho(x)).$$

Si $x \notin \Omega$, alors $\chi_\alpha(x) = 0$ puisque $\rho(x) \geq 0$. Si $x \in \Omega$, $\chi_\alpha(x) = 1$ pour α tel que $\alpha\rho(x) \leq -1$, ce qui est toujours possible, quitte à choisir α assez grand. De plus, puisque $\chi_\alpha \leq 1$, par le TCD,

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d),\ \int_{\mathbb{R}^d} \chi_\alpha(x)\varphi(x)\mathrm{d}x \xrightarrow[\alpha\to+\infty]{} \int_\Omega \varphi(x)\mathrm{d}x.$$

Cela se traduit par le fait que la famille $(T_{\chi_\alpha})_{\alpha>0}$ converge vers $\mathbb{1}_\Omega$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ lorsque α tend vers l'infini.

Par continuité des opérations de dérivation et de multiplication par une fonction C^∞ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, on a aussi

$$\forall i \in \{1, \dots, d\},\ -\nu_i \sum_{k=1}^d \nu_k \partial_{x_k} \chi_\alpha \xrightarrow[\alpha\to+\infty]{} -\nu_i \sum_{k=1}^d \nu_k \partial_{x_k} \mathbb{1}_\Omega = \nu_i \left(-\frac{\partial}{\partial\nu}\mathbb{1}_\Omega\right) = \nu_i \mathrm{d}\sigma$$

avec convergence dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ dont on suppose que le support contient un voisinage de $\partial\Omega$. On a

$$\begin{aligned}
\left\langle -\nu_i \sum_{k=1}^d \nu_k \partial_{x_k} \chi_\alpha, \varphi \right\rangle &= \left\langle -\sum_{k=1}^d \nu_k \partial_{x_k} \chi_\alpha, \nu_i\varphi \right\rangle \\
&= -\alpha \int_{\mathbb{R}^d} \chi'(\alpha\rho(x)) \sum_{k=1}^d \partial_{x_k}\rho(x)\nu_k(x)\nu_i(x)\varphi(x)\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Or, $\sum_{k=1}^d \partial_{x_k}\rho(x)\nu_k(x) = ||\nabla\rho(x)||$, d'où

$$\begin{aligned}
\left\langle -\nu_i \sum_{k=1}^d \nu_k \partial_{x_k} \chi_\alpha, \varphi \right\rangle &= -\alpha \int_{\mathbb{R}^d} \chi'(\alpha\rho(x))||\nabla\rho(x)||\nu_i(x)\varphi(x)\mathrm{d}x \\
&= -\alpha \int_{\mathbb{R}^d} \chi'(\alpha\rho(x))\partial_{x_i}\rho(x)\varphi(x)\mathrm{d}x \\
&= -\int_{\mathbb{R}^d} \partial_{x_i}(\chi_\alpha(x))\varphi(x)\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

En faisant tendre α vers l'infini dans cette dernière égalité et en utilisant les résultats précédents, on obtient,

$$< \nu_i \mathrm{d}\sigma, \varphi >= - < \partial_{x_i} \mathbb{1}_\Omega, \varphi > .$$

En effet, $(T_{\chi_\alpha})_{\alpha>0}$ converge vers $\mathbb{1}_\Omega$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ donc $(\partial_{x_i} T_{\chi_\alpha})_{\alpha>0} = (T_{\partial_{x_i}\chi_\alpha})_{\alpha>0}$ (puisque χ_α est C^∞ donc C^1) converge vers $\mathbb{1}_\Omega$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$. On a donc bien montré que dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, $\nu_i \mathrm{d}\sigma = -\partial_{x_i} \mathbb{1}_\Omega$.

□

Avant d'énoncer le théorème de Stokes nous donnons une notation qui est justifiée par le résultat suivant que l'on ne démontre pas.

Proposition 11.4.2. *Soient Ω un ouvert régulier de $\mathbb{R}^d$ borné et soit $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Soit f continue sur $\overline{\Omega}$. Alors, les deux propriétés sont équivalentes :*

1. *f est de classe C^k dans Ω et les dérivées de f jusqu'à l'ordre k se prolongent continûment à $\overline{\Omega}$.*
2. *Il existe une fonction appartenant à $C^k(\mathbb{R}^d)$ qui coïncide avec f sur $\overline{\Omega}$.*

On dit alors que f est de classe C^k jusqu'au bord de Ω et on note $f \in C^k(\overline{\Omega})$ si ces conditions sont vérifiées.

Pour $X = (X_1, \ldots, X_d)$ un champ de vecteur dont les composantes $X_i \in C^1(\overline{\Omega})$, on rappelle la définition de la divergence :

$$\operatorname{div} X = \sum_{i=1}^{d} \partial_{x_i} X_i.$$

Théorème 11.4.3 (Formule de Stokes)**.** *Soit Ω un ouvert borné régulier et X un champ de vecteur défini sur $\overline{\Omega}$ et dont les composantes $X_i \in C^1(\overline{\Omega})$. Alors,*

$$\int_{\partial\Omega} X \cdot \nu \, \mathrm{d}\sigma = \int_\Omega \operatorname{div} X \, \mathrm{d}x,$$

où, en tout point de $x \in \partial\Omega$, $X(x) \cdot \nu(x)$ désigne le produit scalaire dans $\mathbb{R}^d$ des deux vecteurs.

Démonstration : D'après la Proposition 11.4.1, on a

$$\begin{aligned}
< \mathrm{d}\sigma, X \cdot \nu > &= \left\langle \mathrm{d}\sigma, \sum_{i=1}^{d} \nu_i X_i \right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{d} < \nu_i \mathrm{d}\sigma, X_i > \\
&= - \sum_{i=1}^{d} < \partial_{x_i} \mathbb{1}_\Omega, X_i > \\
&= \left\langle \mathbb{1}_\Omega, \sum_{i=1}^{d} \partial_{x_i} X_i \right\rangle \\
&= < \mathbb{1}_\Omega, \operatorname{div} X > .
\end{aligned}$$

D'où la formule de Stokes.

□

11.4.2 Intégration par parties multidimensionnelle

Nous déduisons du théorème de Stokes un théorème d'intégration par parties multidimensionnelle.

Corollaire 11.4.4 (IPP). *Soient Ω un ouvert régulier et soit u et v dans $C^1(\overline{\Omega})$. On a, pour tout $i \in \{1, \ldots, d\}$,*

$$\int_\Omega v(x)\partial_{x_i}u(x)\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} u(x)v(x)\nu_i(x)\mathrm{d}\sigma(x) - \int_\Omega u(x)\partial_{x_i}v(x)\mathrm{d}x.$$

Démonstration : Il suffit d'appliquer la formule de Stokes au champ de vecteur $X \ : \ x \mapsto u(x)v(x)e_i$ où e_i est le i-ième vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^d$.

□

Exemple 11.4.5. *Appliquons cette formule à l'ouvert $\Omega =]0,1[$. La mesure de surface de $\partial\Omega$ est $\mathrm{d}\sigma = \delta_0 + \delta_1$. On a alors, pour u et v dans $C^1(\overline{\Omega})$,*

$$\begin{aligned}\int_0^1 v(x)u'(x)\mathrm{d}x &= < \delta_0 + \delta_1, u \cdot v \cdot \nu > - \int_0^1 v'(x)u(x)\mathrm{d}x \\ &= u(1)v(1) - u(0)v(0) - \int_0^1 v'(x)u(x)\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

puisque $\nu(0) = -1$ et $\nu(1) = 1$. On retrouve exactement la formule d'intégration par parties habituelle en dimension 1.

11.4.3 Formule de Green pour le laplacien

On peut aussi retrouver la formule de Green pour la Laplacien.

Corollaire 11.4.6. *Soient Ω un ouvert régulier et soient u et v dans $C^2(\overline{\Omega})$. On a,*

$$\int_\Omega (u\Delta v - v\Delta u)\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} \left(u\frac{\partial v}{\partial \nu} - v\frac{\partial u}{\partial \nu}\right) \mathrm{d}\sigma.$$

Démonstration : On applique la formule de Stokes au champ de vecteurs $u\nabla v$. On obtient :

$$\int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v + u\Delta v)\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} u(\nabla v \cdot \nu)\mathrm{d}\sigma.$$

Puis on retranche la formule symétrique en u et v pour avoir le résultat.

□

11.4.4 Formule des sauts multidimensionnelle

Soit Ω un ouvert régulier borné et soit Ω^c le complémentaire de $\overline{\Omega}$. Soit $\underline{u}$ une fonction définie dans $\mathbb{R}^d$ telle que ses restricitions u et u^c à Ω et Ω^c se prolongent par continuité en des éléments de $C^1(\overline{\Omega})$ et $C^1(\overline{\Omega^c})$. Pour $x \in \partial\Omega$, on notera $u_{\text{int}}(x)$ et $u_{\text{ext}}(x)$ les valeurs respectives de ces prolongements.

Théorème 11.4.7 (Formule des sauts). *Avec les notations ci-dessus, on a, pour tout $i \in \{1, \ldots, d\}$,*

$$\partial_{x_i} T_{\underline{u}} = T_{\partial_{x_i} u} + T_{\partial_{x_i} u^c} + (u_{\text{ext}} - u_{\text{int}})(\nu(\cdot).e_i)\mathrm{d}\sigma$$

où $(u_{\text{ext}} - u_{\text{int}})\nu(\cdot).e_i\mathrm{d}\sigma$ est la mesure de Radon dont la densité par rapport à $\mathrm{d}\sigma$ est $x \mapsto (u_{\text{ext}}(x) - u_{\text{int}}(x))\nu(x).e_i$.

Démonstration : Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. Soit $i \in \{1, \ldots, d\}$. On applique la formule d'intégration par parties dans $\overline{\Omega}$ au produit de φ par le prolongement par continuité de u à $\overline{\Omega}$. On obtient

$$-\int_\Omega \underline{u}(x)\partial_{x_i}\varphi(x)\mathrm{d}x = \int_\Omega \varphi(x)\partial_{x_i}u(x)\mathrm{d}x - \int_{\partial\Omega}\varphi(x)u_{\mathrm{int}}(x)\nu(x)\cdot e_i \mathrm{d}\sigma.$$

Puis, on applique la formule d'intégration par parties dans $\overline{\Omega^c}$ au produit de φ par le prolongement par continuité de u^c à $\overline{\Omega^c}$. On obtient

$$-\int_{\Omega^c} \underline{u}(x)\partial_{x_i}\varphi(x)\mathrm{d}x = \int_{\Omega^c} \varphi(x)\partial_{x_i}u^c(x)\mathrm{d}x - \int_{\partial\Omega}\varphi(x)u_{\mathrm{ext}}(x)(-\nu(x))\cdot e_i \mathrm{d}\sigma.$$

La somme des membres de gauche vaut par définition $< \partial_{x_i}T_{\underline{u}}, \varphi >$. La somme des premiers termes des membres de droite donne $< T_{\partial_{x_i}u} + T_{\partial_{x_i}u^c}, \varphi >$ et la somme des termes restant vaut :

$$\int_{\partial\Omega}\varphi(x)(u_{\mathrm{ext}}(x) - u_{\mathrm{int}}(x))\nu(x)\cdot e_i\mathrm{d}\sigma = \langle (u_{\mathrm{ext}} - u_{\mathrm{int}})\nu \cdot e_i \mathrm{d}\sigma, \varphi\rangle .$$

□

11.5 Applications

11.5.1 Les relations de Rankine-Hugoniot

On considère le système d'équations d'Euler conservatives, modélisant l'écoulement instationnaire d'un fluide de densité ponctuelle ρ, de vitesse u, de pression p et d'énergie e, qui sont des “fonctions” de $x \in \mathbb{R}$ et de t. Ainsi

$$\begin{cases} \partial_t\rho + \partial_x(\rho u) = 0 \\ \partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2 + p) = 0 \\ \partial_t(\rho e) + \partial_x(\rho u e + p u) = 0. \end{cases} \tag{11.2}$$

On suppose que le fluide est traversé par un choc de vitesse σ, c'est-à-dire qu'il y a par exemple, discontinuité de la densité au travers de la courbe dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ $x - \sigma t = 0$. On désignera par f^+ la limite de $f(x,t)$ pour $x - \sigma t \to 0, x - \sigma t > 0$ et par f^- la limite de $f(x,t)$ pour $x - \sigma t \to 0, x - \sigma t < 0$.
On veut trouver des relations entre les valeurs de ρ, u, e, p avant et après le choc, en fonction de σ. On intègre contre la fonction $1_{x\in[\sigma t-\varepsilon, \sigma t+\varepsilon]}$ l'équation $\partial_t\rho + \partial_x(\rho u) = 0$. On obtient :

$$\int_{\sigma t-\varepsilon}^{\sigma t+\varepsilon}(\partial_t\rho + \partial_x(\rho u))dx = 0.$$

On note $\tilde{\rho}(X,t) = \rho(X + \sigma t, t)$, la densité liée au choc. On trouve

$$\partial_t\tilde{\rho} = \sigma\partial_x\rho(X + \sigma t, t) + \partial_t\rho(X + \sigma t, t).$$

On obtient alors

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\partial_t\rho(X + \sigma t, t)dX + \sigma[\rho(\sigma t + \varepsilon, t) - \rho(\sigma t - \varepsilon, t)] = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\partial_t\tilde{\rho}(X + \sigma t, t)dX.$$

Ainsi, on obtient

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\partial_t\tilde{\rho}(X + \sigma t, t)dX - \sigma[\rho(\sigma t + \varepsilon, t) - \rho(\sigma t - \varepsilon, t)] + (\rho u)(\sigma t - \varepsilon, t) - (\rho u)(\sigma t - \varepsilon, t) = 0.$$

Nous faisons l'hypothèse que $\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \partial_t \tilde{\rho}(X+\sigma t,t)dX$ tend vers 0 lorsque ε tend vers 0. On en tire, appliquant ce même raisonnement pour toutes les équations

$$\begin{cases} \sigma(\rho^+ - \rho^-) = (\rho u)^+ - (\rho u)^- \\ \sigma((\rho u)^+ - (\rho u)^-) = (\rho u^2 + p)^+ - (\rho u^2 + p)^- \\ \sigma((\rho e)^+ - (\rho e)^-) = (\rho u e + p u)^+ - (\rho u e + p u)^- \end{cases} \tag{11.3}$$

Nous pouvons à présent donner une justification plus générale du résultat que l'on vient d'énoncer. On suppose que l'on étudie un système conservatif du type :

$$\partial_t U + \partial_x (F(U)) = 0.$$

On suppose que, dans l'espace (x,t), il existe une solution de classe C^1 pour $x - \sigma t < 0$ notée U_1 et une solution de classe C^1 pour $x - \sigma t > 0$ notée U_2. On peut alors poser :

$$V(x,t) = U_1(x,t) + (U_2(x,t) - U_1(x,t))H(x - \sigma t).$$

Cette fonction coïncide avec U_1 pour $x < \sigma t$ et avec U_2 pour $x > \sigma t$. Ainsi, $\partial_t V + \partial_x(F(V))$ est nulle pour $x \neq \sigma t$. On vérifie alors par la formule des sauts que :

$$\partial_t V = \partial_t U_1 + (\partial_t U_2 - \partial_t U_1)H(x - \sigma t) - \sigma \delta_{x-\sigma t=0}(U_2(\sigma t,t) - U_1(\sigma t,t)).$$

De même, par la formule des sauts appliquée à $F(V)$, on a :

$$\partial_x(F(V)) = \partial_x(F(U_1)) + (\partial_x(F(U_2)) - \partial_x(F(U_1)))H(x-\sigma t) + (F(U_2(\sigma t,t)) - F(U_1(\sigma t,t)))\delta_{x-\sigma t=0}.$$

Il vient ainsi

$$\partial_t V + \partial_x(F(V)) = (F(U_2(\sigma t,t)) - F(U_1(\sigma t,t)) - \sigma(U_2(\sigma t,t) - U_1(\sigma t,t)))\delta_{x-\sigma t=0}.$$

Si on veut que V soit une solution de l'équation convervative au sens des distributions, il faut que $F(U_2) - F(U_1) = \sigma(U_2 - U_1)$ sur la surface de discontinuité $x = \sigma t$.

11.5.2 Équation des ondes en dimension 3

On note $(t,\vec{r}) = (t,x,y,z)$ les coordonnées d'un point de l'espace-temps et $\square = \partial_t^2 - \Delta_r$ le d'Alembertien.

On note Γ la surface du cône d'avenir définie par $t = r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Bien que Γ ne soit pas une surface régulière à l'origine, on peut tout de même définir sa mesure de surface par

$$\int_\Gamma f \mathrm{d}\sigma = \sqrt{2} \int_{\mathbb{R}^3} f(r,\vec{r}) \mathrm{d}\vec{r},$$

pour f définie sur Γ, continue et à support compact.

Enfin, si on note $\rho = \sqrt{t^2 + r^2}$, alors la distribution de simple couche $\frac{\mathrm{d}\sigma}{4\pi\rho}$ est une solution élémentaire de l'équation des ondes, $\square u = f$. Il s'agit d'une mesure de Radon positive bien définie : en remarquant que, sur Γ, $\rho = r\sqrt{2}$, on a :

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^4),\ \left\langle \frac{\mathrm{d}\sigma}{4\pi\rho}, \varphi \right\rangle = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\varphi(r,\vec{r})}{4\pi r} \mathrm{d}\vec{r}.$$

La fonction $1/r$ étant localement intégrable dans $\mathbb{R}^3$, l'intégrale de droite est finie et la forme linéaire est bien définie et positive.

Nous dirons qu'une distribution u sur $\mathbb{R}^4$ est nulle dans le passé s'il existe $T_0 \in \mathbb{R}$ tel que le support de u soit inclus dans $[T_0, +\infty[\times\mathbb{R}^3$. Alors, si $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^4)$ est nulle dans le passé, il existe une et une seule solution $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^4)$ de $\Box u = f$ qui soit nulle dans le passé. Il s'agit de la distribution

$$u = \left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{4\pi\rho}\right) \star f.$$

Le support de u est contenu dans l'ensemble des $(t, \vec{r})$ tels qu'il existe $(t_0, \vec{r}_0) \in \operatorname{supp} f$ avec $t \geq t_0$ et $t - t_0 = ||\vec{r} - \vec{r}_0||$.