Institut Galilée **2015-2016**
Filière MACS2 / M1 Mathématiques Pures
Théorie des Distributions

Feuille d'exercices : Notions avancées.

Exercice 1

Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Montrer que les expressions suivantes définissent des distributions dont on déterminera l'ordre et le support :

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(x^2)\,\mathrm{d}x, \quad \int_{\mathbb{R}} \varphi'(x)e^{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 2

1. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Montrer que l'expression suivante définit une distribution T d'ordre au plus 1 :

$$\int_0^{+\infty} \varphi'(x)\log(x)\,\mathrm{d}x.$$

2. Soit φ_n une fonction plateau valant 1 sur $[\frac{1}{n}, 1]$ et dont le support est inclus dans $[\frac{1}{2n}, 2]$.
a. Minorer $< T, \varphi_n >$.
b. En déduire que T est une distribution d'ordre exactement 1.
3. Déterminer le support de T.

Exercice 3

Soit h un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit T l'application linéaire de $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2),\ < T, \varphi >= \int_{\mathbb{R}} \varphi(x, h(x))\,\mathrm{d}x.$$

1. Montrer que $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$. Quel est son ordre ?

2. Déterminer le support de T.

3. En déduire qu'il n'existe pas de fonction continue sur $\mathbb{R}^2$ telle que T soit la distribution associée à cette fonction.

4. Calculer, au sens des distributions, $(\partial_x + h'(x)\partial_y)T$.

Exercice 4

Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$.
1. Montrer que l'expression suivante définit une distribution T sur $\mathbb{R}^2$ d'ordre au plus 1 :

$$< T, \varphi >= \int_0^\infty \left(\varphi(1/t^2, \sin t) - \varphi(0, \sin t)\right)\,\mathrm{d}t.$$

2. Calculer le support de T.

Exercice 5

Soit T une distribution sur $\mathbb{R}^d$ et f une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^d$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que, si $fT = 0$, alors le support de T est inclus dans l'ensemble $Z(f) = \{x \in \mathbb{R}^d,\ f(x) = 0\}$.

2. On suppose de plus que T est d'ordre 0. Montrer qu'alors la réciproque est vraie : si le support de T est inclus dans l'ensemble $Z(f) = \{x \in \mathbb{R}^d,\ f(x) = 0\}$ alors $fT = 0$.

3. En prenant $T = \delta_0^{'}$, montrer que la réciproque est fausse en général si T n'est pas d'ordre 0.

4. Caractériser les fonctions f de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ telles que $f\delta_0^{'} = 0$.

Exercice 6

1. Résoudre, dans l'ensemble des fonctions localement intégrables sur $\mathbb{R}$, l'équation différentielle : $2xu' - u = 0$.

2. Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ une solution de l'équation

$$2xT' - T = 0.$$

Soit T_1 sa restriction à $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+^*)$ et soit T_2 sa restriction à $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_-^*)$.

a. Calculer T_1 et T_2.

b. Soit $S = T - T_1 - T_2$. Vérifier que le support de S est inclus dans $\{0\}$.

c. Soit

$$R = \sum_{k=0}^{p} a_k \delta^{(k)} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$$

où les a_k sont dans $\mathbb{C}$. Montrer que : $2xR' - R = 0 \iff R = 0$.

d. En déduire les solutions dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ de l'équation $2xT' - T = 0$.

2. Résoudre, dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, l'équation différentielle :

$$2xT' - T = \delta_0.$$

3. En déduire une solution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ de l'équation différentielle : $2xT' - T = f$, où $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ est à support compact.

Exercice 7

1. Calculer $\delta_0' \star \delta_0'$ pour $\delta_0 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

2. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Calculer $\delta_a' \otimes \delta_b'$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$.

3. Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une distribution $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, à support compact, telle que $E \star T = T^{(k)}$.

4. Soient T et S dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, S étant supposée à support compact. Pour $n \in \mathbb{N}$, on désigne par X^n la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $x \mapsto x^n$. Démontrer la formule suivante :

$$X^n(T \star S) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (X^k T) \star (X^{n-k} S).$$

Exercice 8

On note $\mathcal{D}'_+(\mathbb{R}) = \{T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}); \text{supp } T \subset [0, +\infty[\}$. Soit $\chi \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que, $\chi = 1$ sur $]-\frac{1}{2}, +\infty[$ et $\chi = 0$ sur $]-\infty, -1[$.

1.a. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Montrer que l'application

$$\varphi^\Delta : (x, y) \mapsto \chi(x)\chi(y)\varphi(x+y),$$

est dans $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$.

b. Soient $T, S \in \mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$. On définit

$$< T \star S, \varphi > = < T_x \otimes S_y, \varphi^\Delta > .$$

Montrer que $T \star S$ est bien définie et est indépendante du choix de χ.

c. Montrer que $T \star S \in \mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$.

2. On dit que $T \in \mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$ est inversible, s'il existe $S \in \mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$ telle que $T \star S = \delta_0$. On note $S = T^{-1}$.

a. Montrer que δ_0' est inversible et calculer son inverse.

b. Montrer que, si $T \in C_0^\infty(]0, +\infty[)$, T n'est pas inversible.

Exercice 9

Soit $d \geq 1$. Soit $V \in C^0(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ une fonction continue de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$ telle que : $\forall x \in \mathbb{R}^d$, $V(x) \geq 1$. Soit $u \in L^2(\mathbb{R}^d) \cap C^2(\mathbb{R}^d)$, à valeurs réelles et solution de l'équation aux dérivées partielles dans $\mathbb{R}^d$:

$$-\Delta u + Vu = 0.$$

On se propose de montrer que u est identiquement nulle.

1. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \ \Delta(u^2)(x) \geq 2(u(x))^2.$$

2. On désigne par $\mathbb{S}^{d-1}$ la sphère unité de $\mathbb{R}^d$. Soit $\omega \in \mathbb{S}^{d-1}$ et soit $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^d)$. On considère la fonction g définie sur $I =]0, +\infty[$ par $g(r) = \varphi(r\omega)$. Montrer que, pour tout $r \in I$ on a

$$g'(r) = \frac{\partial \varphi}{\partial \nu}(r\omega)$$

où $\frac{\partial}{\partial \nu} = \sum_{i=1}^d \nu_i . \frac{\partial}{\partial x_i}$ désigne la dérivée normale extérieure à $B = \{x \in \mathbb{R}^d \mid |x| < r\}$.

On rappelle que le vecteur normal unitaire sortant pour la boule B est donné en tout point $x = (x_1, \ldots, x_d) \in r\mathbb{S}^{d-1}$ par $\nu(x) = (\frac{x_1}{r}, \ldots, \frac{x_d}{r})$.

3. Justifier que pour tout $r > 0$,

$$I(r) := \int_{|x|<r} \Delta(u^2)(x) \mathrm{d}x = \int_{|x|=r} \frac{\partial(u^2)}{\partial \nu}(x) \mathrm{d}\sigma$$

où $\mathrm{d}\sigma$ désigne la mesure de surface sur la sphère de centre 0 et de rayon r.

4. On pose $F(r) = r^{d-1} \int_{\omega \in \mathbb{S}^{d-1}} u^2(r\omega) \mathrm{d}\omega$.
   (a) Montrer que F est dérivable sur I et calculer $F'(r)$ pour tout $r \in I$.
   (b) Déduire des questions précédentes que :
   $$\forall r > 0, \ F'(r) \geq r^{d-1} I(r) \geq 0.$$
   (c) Justifier que
   $$\int_0^{+\infty} F(r) \mathrm{d}r = ||u||^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} < +\infty.$$
   (d) Déduire des questions précédentes que :
   $$\forall r > 0, \ F(r) = 0.$$
   Conclure.