①

Exercice 1 :

a. Soit $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\operatorname{supp}\varphi \subset [a,b]$.

L'application $T : \varphi \mapsto \int_{\mathbb{R}} \varphi(x^2)\,dx$ est une forme linéaire sur $C_0^\infty(\mathbb{R})$ et :

$$\left|\int_{\mathbb{R}} \varphi(x^2)\,dx\right| = \left|\int_a^b \varphi(x^2)\,dx\right| \leq \int_a^b |\varphi(x^2)|\,dx \leq \|\varphi\|_\infty \underbrace{\int_{x^2\in[a,b]} dx}_{} = C\,\|\varphi\|_\infty$$

Donc T est une distribution d'ordre au plus 0, donc d'ordre exactement 0. Déterminons son support.

Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}_-^*)$. Alors $\langle T, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x^2)\,dx = 0$ car $\operatorname{supp}\varphi \subset \mathbb{R}_-^*$ implique que $\varphi(y) = 0$ pour $y \geq 0$.

Donc $(\operatorname{supp} T)^c \supset \mathbb{R}_-^*$ et $\operatorname{supp} T \subset \mathbb{R}_+$.

Réciproquement, soit $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $\delta > 0$ tel que $x_0 - \delta > 0$ et soit $V_\delta =]x_0-\delta, x_0+\delta[$. Soit φ une fonction "pic", $\varphi \in C_0^\infty(V_\delta)$, $\varphi \geq 0$ et $\varphi(x_0) = 1$. En particulier, φ est strictement positive sur $V_{\delta'} =]x_0-\delta', x_0+\delta'[$ avec $0 < \delta' < \delta$ et $V_{\delta'} \subset V_\delta$, $x_0 \in V_{\delta'}$. On a de plus :

$$\langle T, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x^2)\,dx = \int_{x^2\in V_\delta} \varphi(x^2)\,dx = \int_{\sqrt{x_0-\delta}}^{\sqrt{x_0+\delta}} \varphi(x^2)\,dx = \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \varphi(y)\,dy \geq \int_{x_0-\delta'}^{x_0+\delta'} \varphi(y)\,dy > 0$$

Donc T est non nulle au voisinage de x_0. Donc $\mathbb{R}_+^* \subset \operatorname{supp} T$. Comme $\operatorname{supp} T$ est fermé, on a $\mathbb{R}_+ \subset \operatorname{supp} T$. Donc : $\operatorname{supp} T = \mathbb{R}_+$.

(2)

b. L'application $T : \varphi \mapsto \int_{\mathbb{R}} \varphi'(x) e^{x^2} dx$ est une forme linéaire sur $C_0^\infty(\mathbb{R})$.
Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ et soit $[a,b] \subset \mathbb{R}$ tel que $\operatorname{supp}\varphi \subset [a,b]$. Alors:

$$\left| \int_{\mathbb{R}} \varphi'(x) e^{x^2} dx \right| = \left| \underbrace{\left[\varphi(x) e^{x^2} \right]_a^b}_{=0 \text{ car } \varphi(a)=\varphi(b)=0} - \int_a^b \varphi(x) \times 2x e^{x^2} dx \right|$$

$$\leq \int_a^b |\varphi(x)| \, |2x e^{x^2}| dx \leq \|\varphi\|_\infty \left(e^{b^2} - e^{a^2} \right) = C \|\varphi\|_\infty .$$

Donc T est une distribution d'ordre au plus 0, donc d'ordre 0. Calculons le support de T. Soit $x_0 \in \mathbb{R}^*$ et $\delta > 0$ tel que $V_\delta =]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\subset \mathbb{R}^*$. Soit $\varphi \in C_0^\infty(V_\delta)$, $\varphi(x_0) = 1$ et $\varphi \geq 0$. Par ailleurs, $f : x \mapsto 2x e^{x^2}$ a un signe constant sur V_δ, disons strictement positif. Donc:

$\exists \delta' < \delta$, $\langle T, \varphi \rangle \geq \int_{V_{\delta'}} \varphi(x) f(x) dx > 0$. (cf a.)

Donc $\mathbb{R}^* \subset \operatorname{supp} T$ et comme $\operatorname{supp} T$ est fermé, $\mathbb{R} \subset \operatorname{supp} T$.

Donc $\operatorname{supp} T = \mathbb{R}$.

(3)

Exercice 2 :

1. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. L'application $T : \varphi \mapsto \int_0^{+\infty} \varphi'(x)\log(x)\,dx$ est une forme linéaire sur $C_0^\infty(\mathbb{R})$. Soit $[a,b] \subset \mathbb{R}$ tel que $\operatorname{supp}\varphi \subset [a,b]$. Alors :

$$|\langle T,\varphi\rangle| = \left|\int_0^{+\infty} \varphi'(x)\log(x)\,dx\right| = \left|\int_{[a,b]\cap\mathbb{R}^+} \varphi'(x)\log x\,dx\right| \leq \|\varphi'\|_\infty \underbrace{\left|\int_{[a,b]\cap\mathbb{R}^+} \log x\,dx\right|}_{\text{Constante car } x\mapsto\log x \text{ est intégrable en } 0}$$

Donc T est une distribution d'ordre au plus 1.

2. a. Avec φ_n comme dans l'énoncé, on a :

$$|\langle T,\varphi_n\rangle| = \left|\int_{\frac{1}{2n}}^2 \varphi'(x)\log x\,dx\right| = \left|\underbrace{[\varphi(x)\log x]_{\frac{1}{2n}}^2}_{=0} - \int_{\frac{1}{2n}}^2 \frac{\varphi(x)}{x}\,dx\right|$$

$$\geq \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{\varphi(x)}{x}\,dx = \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{dx}{x} = \log n.$$

Donc : $\forall n \geq 1$, $|\langle T,\varphi_n\rangle| \geq \log n. \left(\xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty\right)$

b. Or, $\|\varphi_n\|_\infty = 1$ pour tout $n \geq 1$. Donc, avec $[a,b] = [0,2]$, il existe $[a,b] \subset \mathbb{R}$, tel que pour tout $C > 0$ et tout $n \geq 1$, il existe $\varphi_n \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\operatorname{supp}\varphi_n \subset [0,2]$ et : $|\langle T,\varphi_n\rangle| \geq C\|\varphi_n\|_\infty = C$. (car $\log n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$).

Donc T n'est pas d'ordre 0, elle est donc d'ordre 1.

3. Tout d'abord, si $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ avec $\operatorname{supp}\varphi \subset \mathbb{R}_-^*$, alors :

$$\langle T,\varphi\rangle = \int_0^{+\infty} \varphi'(x)\log x\,dx = 0 \quad \text{car } \varphi \equiv 0 \text{ sur } [0,+\infty[.$$

Donc $\operatorname{supp} T \subset \mathbb{R}_+$.

Réciproquement, soit $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et soit $\delta > 0$ tel que $]x_0-\delta, x_0+\delta[\subset \mathbb{R}_+^*$. Soit $\varphi \in C_0^\infty(]x_0-\delta, x_0+\delta[)$, $\varphi(x_0) = 1$ et $\varphi \geq 0$. Alors :

$$\langle T,\varphi\rangle = \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \varphi'(x)\log x\,dx = -\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx < 0. \text{ Donc } \langle T,\varphi\rangle \neq 0.$$

Donc $x_0 \in \operatorname{supp} T$ et $\mathbb{R}_+^* \subset \operatorname{supp} T$. Comme $\operatorname{supp} T$ est fermé, $\mathbb{R}_+ \subset \operatorname{supp} T$. Donc $\operatorname{supp} T = \mathbb{R}_+$.

4

Exercice 3 :

1. Soit K un compact de $\mathbb{R}^2$ et $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, $\operatorname{supp}\varphi \subset K$.
Posons $K_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid (x, h(x)) \in K\}$ qui est compact car K l'est et h est un C^1-difféo.
Alors : $|\langle T, \varphi\rangle| \leq \left(\int_{K_1} dx\right) \sup_{(x,y)\in K} |\varphi(x,y)| \leq C \|\varphi\|_\infty$.
Donc T est une distribution d'ordre au plus 0 donc d'ordre 0 sur $\mathbb{R}^2$.

2. Soit D la courbe $D = \{(x, h(x)) \mid x \in \mathbb{R}\}$. Montrons que $\operatorname{supp} T = D$.
Tout d'abord, soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, $\operatorname{supp}\varphi \subset \mathbb{R}^2 \setminus D$. Alors $\varphi(x, h(x)) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $\langle T, \varphi\rangle = 0$. Donc $D^c \subset (\operatorname{supp} T)^c$ et $\operatorname{supp} T \subset D$.
Réciproquement, montrons que tout point $M_0 = (x_0, h(x_0)) \in D$ est dans $\operatorname{supp} T$.
Soit $\delta > 0$. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ une fonction positive, avec $\operatorname{supp}\varphi \subset B(M_0, \delta)$ et $\varphi(x,y) = 1$ pour tout $(x,y) \in B(M_0, \delta/2)$. Soit $K_\delta = \{x \in \mathbb{R} \mid (x, h(x)) \in B(M_0, \delta)\}$.

$$|\langle T, \varphi\rangle| = \left|\int_{K_\delta} \varphi(x, h(x))\, dx\right| \geq \int_{K_{\delta/2}} \underbrace{\varphi(x, h(x))}_{=1} dx$$
$$\geq \operatorname{Leb}(K_{\delta/2}) > 0$$

où $K_{\delta/2} = \{x \in \mathbb{R} \mid (x, h(x)) \in B(M_0, \delta/2)\}$ est de mesure de Lebesgue strictement positive. Donc T est non nulle au voisinage de M_0, donc $M_0 \in \operatorname{supp} T$.
Ainsi $D \subset \operatorname{supp} T$ et $D = \operatorname{supp} T$.

3. Si T est la distribution T_f associée à une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$ f, alors $\operatorname{supp} T = \operatorname{supp} f$ où $\operatorname{supp} f$ est le support de f au sens des fonctions continues. Alors, f serait nulle en dehors de D qui est de mesure nulle dans $\mathbb{R}^2$, donc T_f serait nulle. Or T est non nulle.

4. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$. Soit $\phi(x) = \varphi(x, h(x))$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
Alors : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\phi'(x) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, h(x)) + h'(x) \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, h(x))$

D'où : $$\langle \partial_x T + h'(x)\partial_y T, \varphi\rangle = -\int_{\mathbb{R}} (\partial_x \varphi + h'(x)\partial_y \varphi)(x, h(x))\, dx = -\int_{\mathbb{R}} \phi'(x)\, dx$$
$$= [\phi(x)]_{-\infty}^{+\infty} = 0 \quad \text{car } \phi \text{ est à support compact.}$$

Donc : $(\partial_x + h'(x)\partial_y) T = 0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$.

5

Exercice 4 :

1. Soit $[-a,a]^2 \subset \mathbb{R}^2$ un compact $(a>0)$ et soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, $\operatorname{supp}\varphi \subset [-a,a]^2$.

Alors :

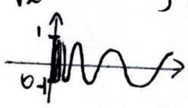
$$|\langle T,\varphi\rangle| = \left|\int_0^{+\infty}\left(\varphi\left(\frac{1}{t^2},\sin t\right)-\varphi(0,\sin t)\right)dt\right| = \left|\int_0^{+\infty}\underbrace{\int_0^1 \partial_x\varphi\left(\frac{s}{t^2},\sin t\right)\frac{ds}{t^2}}_{=\left[\varphi\left(\frac{s}{t^2},\sin t\right)\right]_0^1} dt\right|$$

$$\leq \int_{\frac{1}{\sqrt{a}}}^{+\infty}\left|\int_0^1 \partial_x\varphi\left(\frac{s}{t^2},\sin t\right)\right| ds\,\frac{dt}{t^2}$$

$$\leq \|\partial_x\varphi\|_\infty \int_{\frac{1}{\sqrt{a}}}^{+\infty}\frac{dt}{t^2} = \|\partial_x\varphi\|_\infty\left[-\frac{1}{t}\right]_{\frac{1}{\sqrt{a}}}^{+\infty} = \sqrt{a}\,\|\partial_x\varphi\|_\infty .$$

Comme T est une forme linéaire sur $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, cette estimée de $|\langle T,\varphi\rangle|$ nous dit que T est une distribution d'ordre au plus 1

2. Montrons que si $S=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=\sin\frac{1}{\sqrt{x}},\ x>0\right\}$, alors $\operatorname{supp}T=\bar{S}=S\cup(\{0\}\times[-1,1])$.



$\bar{S}$

- Soit $x_0\notin\bar{S}$. Alors, il existe $\varepsilon>0$, $\bar{B}(x_0,\varepsilon)\subset\bar{S}^c$.

  Soit $\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, $\operatorname{supp}\varphi\subset\bar{B}(x_0,\varepsilon)$. Alors par définition de T, $\langle T,\varphi\rangle=0$ car : $\forall t>0$, $\left(\frac{1}{t^2},\sin t\right)\notin\bar{B}(x_0,\varepsilon)$ et $(0,\sin t)\notin\bar{B}(x_0,\varepsilon)$

  Donc $x_0\notin\operatorname{supp}T$ et $\operatorname{supp}T\subset\bar{S}$.

- Réciproquement, soit $x_0\in S$ et soit $\varepsilon>0$ tel que $B(x_0,\varepsilon)\cap(\{0\}\times[-1,1])=\emptyset$.

  Soit $\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ telle que $\operatorname{supp}\varphi\subset B(x_0,\varepsilon)$, $\varphi=1$ sur $\bar{B}(x_0,\frac{\varepsilon}{2})$ et $\varphi\geq 0$. Alors :

$$\langle T,\varphi\rangle=\int_0^{+\infty}\varphi\left(\frac{1}{t^2},\sin t\right)dt \geq t_2-t_1>0 .$$

où t_1 est tel que $x_0=\left(\frac{1}{t_1^2},\sin t_1\right)$ et $t_2=\inf\left\{t>t_1,\ \left(\frac{1}{t^2},\sin t\right)\notin\bar{B}(x_0,\frac{\varepsilon}{2})\right\}$

Alors, T est non nulle au voisinage de x_0 et $S\subset\operatorname{supp}T$. Comme $\operatorname{supp}T$ est fermé, $\bar{S}\subset\operatorname{supp}T$ et finalement, $\operatorname{supp}T=\bar{S}$.

Exercice 5

1. Supposons que $fT=0$. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\operatorname{supp}\varphi \subset Z(f)^c$.

Alors $\frac{\varphi}{f} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ et on a : $\langle T, \varphi\rangle = \langle fT, \frac{\varphi}{f}\rangle = 0$.

Donc T s'annule sur $Z(f)^c$ et donc $\operatorname{supp} T \subset Z(f)$.

2. Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ d'ordre 0 et supposons que $\operatorname{supp} T \subset Z(f)$.

Soit K un compact de $\mathbb{R}^n$. Comme T est d'ordre 0, il existe $C>0$ telle que pour toute $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\operatorname{supp}\varphi \subset K$,

$$|\langle T, \varphi\rangle| \leq C\|\varphi\|_\infty .$$

Or, pour toute $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $f\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ avec $\operatorname{supp}(f\varphi) \subset K$.

Donc : $|\langle fT, \varphi\rangle| = |\langle T, f\varphi\rangle| \leq C\|f\varphi\|_\infty$.

Or, comme $\operatorname{supp} T \subset Z(f)$, $f\varphi$ est nulle sur $\operatorname{supp} T$ et donc $|\langle fT, \varphi\rangle| = 0$. Donc $fT = 0$.

3. Supposons $T = \delta'$ qui n'est pas d'ordre 0. Prenons $f(x) = x$ par exemple. Alors $\operatorname{supp} T \subset Z(f)$ car $\operatorname{supp} T = \{0\}$, mais si $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ avec $\varphi(0) \neq 0$:

$$\langle x\delta_0', \varphi\rangle = \langle \delta_0', x\varphi\rangle = (x\varphi)'(0) = \varphi(0) \neq 0.$$

Donc $x\delta_0'$ n'est pas la distribution nulle.

4. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. On a : $\langle f\delta_0', \varphi\rangle = \langle \delta_0', f\varphi\rangle = f'(0)\varphi(0) + f(0)\varphi'(0)$

Alors $\langle f\delta_0', \varphi\rangle$ est nul pour φ quelconque si et seulement si :

$$f(0) = f'(0) = 0.$$

Alors $f(x) = x^2 g(x)$ avec $g \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

7

Exercice 6:

1. Comme l'équation différentielle $2xu'-u=0$ est singulière en 0, on cherche ses solutions localement intégrables sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$.

Sur $\mathbb{R}_+^*$ on trouve comme solutions : $u(x)=C_1\sqrt{x}$

Sur $\mathbb{R}_-^*$ on trouve comme solutions : $u(x)=C_2\sqrt{x_-}$.

On note $x_+=\max(x,0)$ et $x_-=\max(-x,0)$.

Les fonctions localement intégrables $u : x\mapsto C_1\sqrt{x_+}+C_2\sqrt{x_-}$ sont donc solutions de $2xu'-u=0$.

2.a. Les distributions associées aux fonctions $u : x\mapsto C_1\sqrt{x_+}+C_2\sqrt{x_-}$ sont solutions de $2xT'-T=0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Puis, soit $T\in\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ une solution de $2xT'-T=0$. Soit T_1 sa restriction à $C_0^\infty(\mathbb{R}_+^*)$. Soit $S_1=\frac{T_1}{\sqrt{x}}$.

Alors : $S_1'=\frac{T_1'}{\sqrt{x}}-\frac{T_1}{2x\sqrt{x}}=\frac{2xT_1'-T_1}{2x\sqrt{x}}=0$

Comme S_1 est définie sur un intervalle (convexe), il existe $C_1\in\mathbb{R}$ telle que $S_1=C_1$. D'où $T_1=C_1\sqrt{x_+}$.

De même : $T_2=C_2\sqrt{x_-}$.

b. Soit $S=T-T_1-T_2$. Si $\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}_+^*)$,
$$\begin{aligned}\langle S,\varphi\rangle&=\langle T,\varphi\rangle-\langle T_1,\varphi\rangle-\langle T_2,\varphi\rangle\\&=\langle T_1,\varphi\rangle-\langle T_1,\varphi\rangle-0\\&=0\end{aligned}$$

Et si $\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}_-^*)$,
$$\begin{aligned}\langle S,\varphi\rangle&=\langle T,\varphi\rangle-\langle T_1,\varphi\rangle-\langle T_2,\varphi\rangle\\&=\langle T_2,\varphi\rangle-0-\langle T_2,\varphi\rangle\\&=0.\end{aligned}$$

Donc $\mathbb{R}_+^*\subset(\operatorname{supp}S)^c$ et $\mathbb{R}_-^*\subset(\operatorname{supp}S)^c$, donc $\operatorname{supp}S\subset\mathbb{R}_-$ et $\operatorname{supp}S\subset\mathbb{R}_+$.

Donc : $\operatorname{supp}S\subset\{0\}$.

8)

<u>c.</u> Soit $R = \sum_{k=0}^{p} a_k \delta^{(k)}$, $a_k \in \mathbb{C}$. Si $R=0$ alors $2xR'-R=0$.

Réciproquement, supposons que $2xR'-R=0$ et montrons que $R=0$.

Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ et $k \geq 1$:

$$\begin{aligned}\langle 2x(\delta^{(k)})', \varphi\rangle &= -\langle \delta^{(k)}, (2x\varphi)'\rangle \\ &= -\langle \delta^{(k)}, 2\varphi\rangle - \langle \delta^{(k)}, 2x\varphi'\rangle \\ &= 2(-1)^{k+1}\left(2\varphi^{(k)}(0) + (2x\varphi')^{(k)}(0)\right) \\ &= 2(-1)^{k+1}(k+1)\varphi^{(k)}(0)\end{aligned}$$

Donc $2xR'-R = \sum_{k=0}^{p} \left(2(-1)^{k+1}(k+1) - 1\right) a_k \delta^{(k)}$

Or $2xR'-R=0$, donc $a_k = 0$ pour tout k et $R=0$.

<u>d.</u> Comme par b., $\operatorname{supp} S \subset \{0\}$, S s'écrit $S = \sum_{k=0}^{p} a_k \delta^{(k)}$.

Si T est solution de $2xT'-T=0$, alors S aussi et donc par c., $S=0$.

Ainsi, $T = T_1 + T_2 = C_1\sqrt{x_+} + C_2\sqrt{x_-}$ ~~sont~~ les solutions de $2xT'-T=0$.

<u>2.</u> La forme du second membre δ_0 nous incite à chercher une solution particulière qui soit combinaison linéaire de dérivées de masses de Dirac en 0. Or, par c., il suffit de prendre une masse de Dirac en 0 et en injectant cette distribution $a_0\delta_0$ dans l'équation, on en tire : $(2(-1)(1)-1)a_0 = 1$ soit $a_0 = -\frac{1}{3}$.

Donc les solutions de l'équation différentielle $2xT'-T=\delta_0$ sont les

$$C_1\sqrt{x_+} + C_2\sqrt{x_-} - \frac{1}{3}\delta_0.$$

<u>3.</u> On note $T_0 = C_1\sqrt{x_+} + C_2\sqrt{x_-} - \frac{1}{3}\delta_0$. Soit $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Alors $T_0 * f$ est solution de $2xT'-T=f$.

En effet : $2x(T_0*f)' - T_0*f = 2xT_0'*f - T_0*f = (2xT_0'-T_0)*f = \delta_0*f = f$.

Et $T_0 * f = C_1\sqrt{x_+}*f + C_2\sqrt{x_-}*f - \frac{1}{3}f$

convolution des fonctions

9

Exercice 7 :

1. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. On a : $\langle \delta_0' * \delta_0', \varphi \rangle = \langle \delta_0' \otimes \delta_0', \varphi^\Delta(x,y) \rangle$
$= \langle \delta_0', -\langle \delta_0, \partial_y \varphi^\Delta(x,y) \rangle \rangle$
où $\varphi^\Delta(x,y) = \varphi(x+y)$. $= \langle \delta_0', -\varphi'(x) \rangle$
$= \varphi''(0)$.

Donc $\delta_0' * \delta_0' = \delta_0''$.

On peut aussi dériver l'égalité : $\delta_0 * \delta_0 = \delta_0$, deux fois.

2. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on note φ_x la fonction de $C_0^\infty(\mathbb{R})$ définie par $\varphi_x(y) = \varphi(x,y)$. On a :

$$\langle \delta_a' \otimes \delta_b', \varphi \rangle = \langle \delta_a', \langle \delta_b', \varphi_x \rangle \rangle = \langle \delta_a', -\varphi_x'(b) \rangle$$
$$= \langle \delta_a', -\partial_y \varphi(x,b) \rangle = \partial_x \partial_y \varphi(a,b).$$

3. $E = \delta_0^{(k)}$ convient. En effet si on dérive k fois l'identité $\delta_0 * T = T$ on obtient
$$\delta_0^{(k)} * T = T^{(k)}.$$

4. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. On a :
$$\langle X^m(T*S), \varphi \rangle = \langle T*S, X^m\varphi \rangle = \langle T \otimes S, (x+y)^m \varphi^\Delta(x,y) \rangle$$
où $\varphi^\Delta(x,y) = \varphi(x+y)$
$$= \sum_{k=0}^{m} C_m^k \langle T \otimes S, x^k y^{m-k} \varphi^\Delta(x,y) \rangle$$
$$= \sum_{k=0}^{m} C_m^k \langle (x^k T) \otimes (y^{m-k} S), \varphi^\Delta(x,y) \rangle = \langle \sum_{k=0}^{m} C_m^k (X^k T) * (X^{m-k} S), \varphi \rangle$$

10

Exercice 8 :

1. a. Comme φ est à support compact, il existe $a>0$ tel que $\operatorname{supp}\varphi \subset [-a,a]$.

Alors, si $\chi(x)\chi(y)\varphi(x+y) \neq 0$, on a $x \geq -1$, $y \geq -1$ et $x+y \leq a$.

D'où : $x \in [-1, a+1]$ et $y \in [-1, a+1]$. Ainsi :

$$\operatorname{supp}(\varphi^\Delta) \subset [-1,a+1]^2 \quad \text{et} \quad \varphi^\Delta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2).$$

b. Par a., la distribution $T*S$ est bien définie. Soit χ_1 une autre fonction vérifiant les mêmes hypothèses que χ. On a :

$$\langle T_x \otimes S_y , \varphi^\Delta(x,y)\rangle - \langle T_x \otimes S_y , \chi_1(x)\chi_1(y)\varphi(x+y)\rangle = \langle T_x \otimes S_y , (\chi(x)-\chi_1(x))\chi(y)\varphi(x+y)\rangle$$
$$+ \langle T_x \otimes S_y , \chi_1(x)(\chi(y)-\chi_1(y))\varphi(x+y)\rangle$$

Or, $\operatorname{supp}(\chi-\chi_1) \subset]-\infty,-\frac{1}{2}]$ donc $(\operatorname{supp} T) \cap \operatorname{supp}(\chi-\chi_1) = \emptyset$, ce qui implique que le premier crochet est nul. Puis, comme $(\operatorname{supp} S) \cap \operatorname{supp}(\chi-\chi_1) = \emptyset$, le second crochet est lui aussi nul. Ainsi :

$$\langle T_x \otimes S_y , \varphi^\Delta\rangle = \langle T_x \otimes S_y , \underbrace{\varphi_1^\Delta}_{\text{correspondant à } \chi_1}\rangle$$ et $T*S$ ne dépend pas du choix de χ.

c. Soit $\delta \in]0,\frac{1}{2}[$ et soit $\chi_\delta \equiv 1$ sur $]-\delta,+\infty[$ et $\chi_\delta \equiv 0$ sur $]-\infty,-2\delta[$.

D'après b., on a :

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}), \quad \langle T*S, \varphi\rangle = \langle T_x \otimes S_y , \varphi(x+y)\chi_\delta(x)\chi_\delta(y)\rangle.$$

On choisit φ à support dans $]-\infty,0[$. Alors, il existe $a>0$ tel que $\operatorname{supp}\varphi \subset]-\infty,-a[$. Ainsi, $(x,y) \mapsto \chi_\delta(x)\chi_\delta(y)\varphi(x+y)$ est non nulle uniquement si $x+y \leq -a$, $x \geq -2\delta$, $y \geq -2\delta$ soit encore $x \leq -a+2\delta$ et $y \leq -a+2\delta$.

Mais, pour δ assez petit, $-a+2\delta<0$ et comme $\operatorname{supp} T \subset [0,+\infty[$ et $\operatorname{supp} S \subset [0,+\infty[$, on obtient : $\langle T*S, \varphi\rangle = 0$. Donc : $\operatorname{supp}(T*S) \subset [0,+\infty[$.

11

2. a. Soit H la distribution de Heaviside, i.e. la fonction indicatrice de $]0,+\infty[$. Alors $H \in \mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$ et

$$H * \delta_0' = H' * \delta_0 = \delta_0 * \delta_0 = \delta_0 .$$

Donc H est l'inverse de δ_0' dans $\mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$.

b. Supposons par l'absurde qu'il existe $S \in \mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$ telle que $T * S = \delta_0$. Comme $T \in C_0^\infty$, on devrait avoir que $T * S$ est la distribution associée à une fonction C^∞. Or δ_0 ne l'est pas. Contradiction et résultat : si $T \in C_0^\infty(]0,+\infty[)$, T n'est pas inversible dans $\mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$.