Université Paris 13, Institut Galilée
Filière Ingénieur MACS, 2ème année
Année universitaire 2014-2015

Examen de Distributions

Le 7 mai 2015

Durée de l'épreuve : 3 heures.
Le sujet comporte deux pages.
Les documents, calculatrices et moyens de communication sont interdits, à l'exception d'une feuille au format A4 manuscrite.

Exercice 1. (Compétences de bases).

1. Définir la distribution de Dirac en 0, $\delta_0 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.
2. Soit H la distribution de Heaviside, distribution associée à la fonction caractéristique de $]0,+\infty[$. Calculer sa dérivée H' dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.
3. Soit $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Posons, pour $n \in \mathbb{N}$,
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi_n(x) = \phi\left(x + \frac{1}{n+1}\right) - \phi(x).$$
Montrer que la suite $(\varphi_n)_{n\geq 0}$ converge vers la fonction nulle dans $C_0^\infty(\mathbb{R})$.
4. Soit $g \in L^1(\mathbb{R})$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la distribution $T_n \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ associée à la fonction $x \mapsto ng(nx)$. Montrer que la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et calculer sa limite.
5. Soit $\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right)$ la distribution "valeur principale de $\frac{1}{x}$" définie par
$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}),\ \left\langle \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right), \varphi \right\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\mathrm{d}x.$$
Montrer que $x\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right) = 1$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Exercice 2. (Compétences attendues).

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle : $u'' - u = 0$.
2. Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ la distribution associée à la fonction localement intégrable $t \mapsto \mathrm{e}^{-|t|}$. Calculer, dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, $T'' - T$.
3. En déduire l'ensemble des solutions dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ de l'équation différentielle : $u'' - u = \delta_0$.

Exercice 3. (Compétences attendues). Soit T l'application linéaire de $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ dans $\mathbb{C}$ définie par :
$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2),\ < T, \varphi >= \int_{\mathbb{R}} \varphi(x, -x)\, \mathrm{d}x.$$

1. Montrer que $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$. Quel est son ordre ?
2. Montrer que le support de T est inclus dans $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = -x\}$.
3. Montrer que $\mathrm{supp}\, T = D$.
4. En déduire qu'il n'existe pas de fonction continue sur $\mathbb{R}^2$ telle que T soit la distribution associée à cette fonction.
5. Calculer, au sens des distributions, $\partial_x T - \partial_y T$.

Exercice 4. (Compétences avancées) On considère l'ensemble :

$$\mathcal{D}'_+ = \{T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}),\ \operatorname{supp} T \subset [0, +\infty[\}.$$

1. Justifier que si T et S sont deux éléments de $\mathcal{D}'_+$, alors $T \star S \in \mathcal{D}'_+$. Il n'est pas demandé de vérifier que $T \star S$ est bien définie et est dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, cela est un résultat du cours.

2. Soit $K \in L^\infty_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+)$, l'ensemble des fonctions bornées presque partout sur tout compact de $\mathbb{R}_+$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $K_n = K \star \cdots \star K$, où le produit de convolution contient n facteurs tous égaux à K. Par convention on suppose que $K_0 = \delta_0$, la distribution de Dirac en 0. Montrer que pour tout $a > 0$, tout $x \in [0, a]$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$|K(x)| \leq M(a)^n \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \quad \text{où } M(a) = \sup_{x \in [0,a]} |K(x)|.$$

Indication : on pourra raisonner par récurrence sur $n \geq 1$.

3. Montrer que la série $\sum (-1)^n K_n$ converge dans $\mathcal{D}'_+$. Il n'est pas demandé de déterminer sa somme.

4. Justifier que la fonction $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n K_n(x)$ est bornée sur tout intervalle $[0, a]$ avec $a > 0$.

5. Montrer que :

$$(\delta_0 + K) \star \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n K_n \right) = \delta_0.$$

6. Soit f et g deux fonctions dans $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+)$ telles que

$$\forall x \geq 0,\ f(x) + \int_0^x \mathrm{e}^{\lambda(x-y)} f(y) \mathrm{d}y = g(x) \quad \text{pour } \lambda \in \mathbb{C}. \tag{1}$$

Montrer que (1) est équivalente à l'équation d'inconnue f dans $\mathcal{D}'_+$,

$$(\delta_0 + H\mathrm{e}^{\lambda \cdot}) \star f = g$$

où H est la distribution de Heaviside associée à la fonction caractéristique de $[0, +\infty[$.

7. En déduire que (1) admet toujours une solution f dans $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+)$.