Université Paris 13, Institut Galilée
Filière Ingénieur MACS, $2^{\text{ème}}$ année
Année universitaire 2014-2015

Examen de Distributions

Le 24 juin 2015

Durée de l'épreuve : 3 heures.
Le sujet comporte deux pages.
Les documents, calculatrices et moyens de communication sont interdits, à l'exception d'une feuille au format A4 manuscrite.

Exercice 1. (Compétences de bases).

1. Définir la distribution de Dirac en 0, $\delta_0 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

2. Pour tout $n \geq 1$, on considère la distribution T_n associée à la fonction localement intégrable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, $e_n : x \mapsto e^{inx}$. Montrer que la suite $(T_n)_{n\geq 1}$ converge dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et calculer sa limite dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

3. Soit $\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right)$ la distribution "valeur principale de $\frac{1}{x}$" définie par

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}),\ \left\langle \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right), \varphi \right\rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} \mathrm{d}x.$$

Soit

$$f \ : \ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} \ln(|x|) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases} \end{array}.$$

Soit $T_f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ la distribution associée à la fonction localement intégrable f. Montrer que $(T_f)' = \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right)$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

4. Soit H la distribution de Heaviside, distribution associée à la fonction caractéristique de $]0, +\infty[$. Calculer le produit de convolution $H \star \delta_0'$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Exercice 2. (Compétences attendues).

1. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Montrer que la limite

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x^{3/2}} \mathrm{e}^{\frac{i}{x}} \mathrm{d}x$$

existe.

Indication : effectuer une intégration par parties en utilisant la formule $(\mathrm{e}^{\frac{i}{x}})' = -i\frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{i}{x}}$.

2. On pose, pour toute $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$,

$$< T, \varphi >= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x^{3/2}} \mathrm{e}^{\frac{i}{x}} \mathrm{d}x.$$

Montrer que T ainsi définie est une distribution sur $\mathbb{R}$ d'ordre au plus 1.

Exercice 3. (Compétences attendues). Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \left(\delta_{\frac{1}{2k+1}} - \delta_{\frac{1}{2k}} \right).$$

1. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une fonction ψ de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(x) = \varphi(0) + x\psi(x).$$

2. Montrer que, pour toute $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, la suite $(< T_n, \varphi >)_{n\in\mathbb{N}^*}$ admet une limite lorsque n tend vers $+\infty$.

3. En déduire que la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ vers une distribution T d'ordre au plus 1.

4. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ à support contenu dans un intervalle $]\frac{1}{m+1}, \frac{1}{m}[$ pour un certain $m \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $< T, \varphi >= 0$.

5. Montrer que, si $m \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{m} \in \operatorname{supp} T$.

6. Déduire des deux questions précédentes le support de T.

Exercice 4. (Compétences attendues) Soit H la fonction indicatrice de $\mathbb{R}_+^*$. On considère la fonction sur $\mathbb{R}^2$ donnée par :

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2,\ E(x,t) = \frac{H(t)}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}.$$

1. Justifier que l'on peut associer à la fonction E une distribution sur $\mathbb{R}^2$.

2. Montrer que, pour tout $t > 0$ et tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\partial_t \left(\frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \right) = \partial_{xx}^2 \left(\frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \right).$$

3. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$. On pose :

$$I_\varepsilon = -\int_{\mathbb{R}} \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}} \partial_t \varphi(x,t)\, \mathrm{d}t\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad J_\varepsilon = -\int_{\mathbb{R}} \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}} \partial_{xx}^2 \varphi(x,t)\, \mathrm{d}t\mathrm{d}x.$$

   (a) Calculer $I_\varepsilon + J_\varepsilon$.

   (b) En effectuant le changement de variable $y = \frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}$, déterminer la limite, lorsque ε tend vers 0, de $I_\varepsilon + J_\varepsilon$.
   Indication : on pourra utiliser que $\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{u^2}{4}}\, \mathrm{d}u = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

4. Calculer $(\partial_t - \partial_{xx}^2)E$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$.

5. En déduire une solution $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ de l'équation aux dérivées partielles :

$$\partial_t u - \partial_{xx}^2 u = f,$$

   où $f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^2)$ est une distribution à support compact.

6. Si de plus $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, que peut-on dire de u?