Université Paris 13, Institut Galilée
Filière Ingénieur MACS / M1 de Mathématiques
Année universitaire 2015-2016

Examen de Distributions

Le 27 novembre 2015

Durée de l'épreuve : 3 heures.
Le sujet comporte deux pages.
Les documents, calculatrices et moyens de communication sont interdits, à l'exception d'une feuille au format A4 manuscrite.
Il est rappelé qu'il est autorisé d'admettre le résultat d'une question afin de pouvoir l'utiliser plus tard si nécessaire. Les questions indiquées par le signe (*) sont supposées plus difficiles.

Exercice 1. (Compétences de bases).

1. Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et $a \in \Omega$. Définir la distribution de Dirac au point a.
2. Soit H la distribution de Heaviside, distribution associée à la fonction caractéristique de $]0, +\infty[$ qui est localement intégrable sur $\mathbb{R}$. Calculer sa dérivée H' dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.
3. (a) Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une fonction $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(x) = \varphi(0) + x\varphi'(0) + x^2\psi(x)$.
   (b) En déduire l'existence de la limite : $\lim_{\varepsilon\to 0^+} \left(\int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2} \mathrm{d}x - 2\frac{\varphi(0)}{\varepsilon} \right) :=< \mathrm{Pf}\left(\frac{1}{x^2}\right), \varphi >$.
   (c) Justifier que la forme linéaire sur $C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\mathrm{Pf}\left(\frac{1}{x^2}\right) : \varphi \mapsto < \mathrm{Pf}\left(\frac{1}{x^2}\right), \varphi >$ est une distribution d'ordre au plus 2 sur $\mathbb{R}$.
4. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = \frac{nx}{1+nx^2}$.
   (a) Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$. On note T_{f_n} la distribution associée à f_n.
   (b) Montrer que $(T_{f_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Quelle distribution classique reconnaissez-vous dans sa limite?
5. On considère l'équation différentielle (E) : $\quad u'' = \delta_0, \quad$ pour $\ u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.
   (a) Résoudre (E) dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.
   (b) Soit f une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. Que peut-on dire d'une solution dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ de l'équation $u'' = f$?

Exercice 2. (Compétences attendues). Soient T et T^+ les formes linéaires sur $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ définies par :

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2),\ < T, \varphi >= \int_{\mathbb{R}} \varphi(x,x)\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad < T^+, \varphi >= \int_0^{+\infty} \varphi(x,x)\,\mathrm{d}x.$$

1. Montrer que T et T^+ sont dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$. Quel sont leurs ordres respectifs ?
2. Calculer, dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$, $\partial_x T + \partial_t T$ et $\partial_x T^+ + \partial_t T^+$.
3. Soit $D = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 \mid t \geq |x|\}$. On note S la distribution associée à la fonction localement intégrable sur $\mathbb{R}^2$,
$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2,\ \mathbf{1}_D(x,t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad (x,t) \in D \\ 0 & \text{si} \quad (x,t) \notin D \end{cases}.$$
   (a) Montrer que $\partial_t S - \partial_x S = 2T^+$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$.
   (b) En déduire $\partial^2_{tt} S - \partial^2_{xx} S$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$. *Indication :* $\partial^2_{tt} - \partial^2_{xx} = (\partial_t + \partial_x)(\partial_t - \partial_x)$.

Exercice 3. (Compétences attendues). On rappelle que, pour une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et pour $a \in \mathbb{R}$, on note $\tau_a f$ la fonction définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ \tau_a f(x) = f(x-a)$.

Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. On note $\tau_a T$ la forme linéaire définie par

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}),\ <\tau_a T, \varphi> = <T, \tau_{-a}\varphi> .$$

1. Montrer que $\tau_a T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.
2. Lorsque $T = T_f$ pour $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ donnée, que vaut $\tau_a T$?

   On dira que $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ est a-périodique lorsque $\tau_a T = T$.

3. Montrer que la suite $(W_N)_{N\geq 0}$ définie par, pour tout $N \geq 0$, $W_N = \sum_{n=-N}^{N} \delta_{2n\pi}$, converge dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ vers une distribution 2π-périodique notée W.
4. On considère une suite de nombres complexes $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ telle que :

$$\exists C > 0,\ \exists p \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{Z},\ |c_n| \leq C(1+|n|)^p. \tag{1}$$

   (a) Montrer que :

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}),\ \forall n \in \mathbb{Z}^*,\ \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}\varphi(x)\mathrm{d}x = \mathcal{O}(n^{-p-2}).$$

   (b) (*) En déduire que $(E_N)_{N\geq 0}$ définie par, pour tout $N \geq 0$, $E_N = \sum_{n=-N}^{N} c_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}$, converge dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ vers une distribution 2π-périodique notée E.

   On rappelle que si $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ est 2π-périodique, alors f est développable en série de Fourier :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx} \quad \text{avec} \quad \forall n \in \mathbb{Z},\ c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}\mathrm{d}x,$$

   où la convergence de la série est normale.

5. (*) Soit $\rho \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ une fonction positive non identiquement nulle. Montrer que la suite $(\sum_{k=-N}^{N} \tau_{-2k\pi}\rho)_{N\geq 0}$ converge dans $C^\infty(\mathbb{R})$ vers une fonction positive.
6. En déduire l'existence d'une fonction $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \sum_{k\in\mathbb{Z}} (\tau_{-2k\pi}\psi)(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \psi(x+2k\pi) = 1.$$

   Soit T une distribution 2π-périodique. On appelle coefficients de Fourier de T les nombres :

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ c_n(T) = \frac{1}{2\pi} <T, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\cdot}\psi>, \quad \text{avec} \quad \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\cdot} : x \mapsto \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}. \tag{2}$$

7. (a) (*) Montrer que la suite $(c_n(T))_{n\in\mathbb{Z}}$ vérifie l'inégalité (1).

   Remarque : On en déduit que la suite $(\sum_{k=-N}^{N} c_n(T)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\cdot})_{N\geq 0}$ converge dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

   Pour $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, on note $\tilde{\varphi}$ la périodisée de φ, *i.e.*, la fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ \tilde{\varphi}(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} (\tau_{2k\pi}\varphi)(x)$.

   (b) Montrer que : $\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}),\ <T, \varphi> = <T, \psi\tilde{\varphi}>$.

   (c) Montrer que : $\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}),\ <T, \psi\tilde{\varphi}> = 2\pi \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_{-n}(T)c_n(\tilde{\varphi})$.

   (d) (*) En déduire que pour toute distribution 2π-périodique T sur $\mathbb{R}$, $T = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(T)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\cdot}$, où $c_n(T)$ est définit en (2).

8. Calculer les coefficients de Fourier de la distribution $W = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_{2n\pi}$.
9. En déduire la formule de Poisson :

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}),\ \sum_{n\in\mathbb{Z}} \varphi(2n\pi) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{\varphi}(n), \quad \text{avec :} \quad \forall \xi \in \mathbb{R},\ \hat{\varphi}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\varphi(x)\mathrm{d}x.$$