

Examen de Distributions

Le 18 décembre 2015

Durée de l'épreuve : 3 heures.

Le sujet comporte deux pages.

Les documents, calculatrices et moyens de communication sont interdits, à l'exception d'une feuille au format A4 manuscrite.

Exercice 1. (Compétences de bases).

1. Soient $m \in \mathbb{N}$ et $d \geq 1$. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$. Donner la définition d'une distribution d'ordre au plus m sur Ω .
2. Calculer, en fonction des entiers $p, q \in \mathbb{N}$, la distribution $x^p \delta_0^{(q)}$.
3. Soit $(f_n)_{n \geq 1}$ la suite de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall n \geq 1, \forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = \left(\cos \left(\frac{x}{\sqrt{n}} \right) \right)^n.$$

- (a) Justifier que, pour tout $n \geq 1$, $f_n \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$. On note T_{f_n} la distribution associée à f_n .
- (b) Montrer que $(T_{f_n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et déterminer sa limite.
4. Soit $\text{vp} \left(\frac{1}{x} \right)$ la distribution valeur principale de $\frac{1}{x}$ définie par

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}), \left\langle \text{vp} \left(\frac{1}{x} \right), \varphi \right\rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x| > \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx.$$

- (a) Rappeler, sans démonstration, quelle est la forme d'une distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ telle que $xT = 0$.
- (b) Montrer que $x \text{vp} \left(\frac{1}{x} \right) = 1$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.
- (c) En déduire l'ensemble des solutions dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ de l'équation $xT = 1$.
5. On considère l'équation différentielle $(E) : T'' = \delta_0$, pour $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.
- (a) Résoudre (E) dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.
- (b) Soit f une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. Justifier que pour toute solution T de l'équation différentielle $T'' = f$, il existe une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ telle que $T = T_u$.

Exercice 2. (Compétences attendues).

1. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Montrer que l'expression suivante définit une distribution T d'ordre au plus 1 :

$$\int_0^{+\infty} \varphi'(x) \log(x) dx.$$

2. Soient $n \geq 1$ et χ_n une fonction plateau valant 1 sur $[\frac{1}{n}, 1]$ et dont le support est inclus dans $[\frac{1}{2n}, 2]$.
 - (a) Minorer, pour tout $n \geq 1$, $|\langle T, \chi_n \rangle|$.
 - (b) En déduire que T est une distribution d'ordre exactement 1.
3. Montrer que $\text{supp } T = [0, +\infty[$.

Exercice 3. (Compétences attendues).

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, résoudre l'équation différentielle $u^{(n)} = 0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.
2. Soit T une distribution à support compact et soit P une fonction polynomiale sur $\mathbb{R}$. Montrer que $T \star P$ est une distribution associée à une fonction polynomiale sur $\mathbb{R}$.

3. On rappelle que $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ et on définit : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, P_k(x) = \frac{k}{\sqrt{\pi}} \left(1 - \frac{x^2}{k}\right)^{k^3}$.

(a) Pour $A > 0$, montrer que

$$\forall k \geq A^2, \quad \forall x \in [-Ak, Ak], \quad \left|1 - \frac{x^2}{k^3}\right|^{k^3} \leq e^{-x^2}.$$

(b) Montrer que $P_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \delta_0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

4. Montrer que toute distribution à support compact est limite dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ d'une suite de fonctions polynomiales.

Exercice 4. (Compétences avancées). On note $\mathcal{D}'_+ = \{T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}) \mid \text{supp } T \subset [0, +\infty[\}$. On rappelle que puisque $\{[0, +\infty[, [0, +\infty]\}$ est une paire convolutive de fermés de $\mathbb{R}$, si T et S sont deux distributions dans $\mathcal{D}'_+$, leur produit de convolution $T \star S$ est bien défini et est un élément de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

1. Soient $T, S \in \mathcal{D}'_+$. Justifier que $T \star S \in \mathcal{D}'_+$.

On dira que $T \in \mathcal{D}'_+$ est inversible dans $\mathcal{D}'_+$ s'il existe $S \in \mathcal{D}'_+$ telle que $T \star S = \delta_0$.

2. Montrer que si $T \in \mathcal{D}'_+$ est inversible dans $\mathcal{D}'_+$, son inverse est unique dans $\mathcal{D}'_+$.
3. Montrer que si $T_1, T_2 \in \mathcal{D}'_+$ sont inversibles dans $\mathcal{D}'_+$, alors $T_1 \star T_2$ est inversible dans $\mathcal{D}'_+$ et déterminer son inverse dans $\mathcal{D}'_+$.
4. Soit $T \in \mathcal{D}'_+$ telle qu'il existe $u \in C^\infty([0, +\infty[)$ telle que $T = T_u$. Montrer que T n'est pas inversible dans $\mathcal{D}'_+$.
5. On note H la distribution de Heaviside, associée à la fonction caractéristique de $]0, +\infty[$.

(a) Montrer que les distributions H et δ'_0 sont des éléments de $\mathcal{D}'_+$, qu'elles sont toutes deux inversibles dans $\mathcal{D}'_+$ et calculer leurs inverses dans $\mathcal{D}'_+$.

(b) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. On pose

$$e_\lambda : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & e^{\lambda x} \end{array}.$$

Justifier que $e_\lambda H \in \mathcal{D}'_+$ et montrer que $e_\lambda H$ est l'inverse de $\delta'_0 - \lambda \delta_0$ dans $\mathcal{D}'_+$.

Soit P un polynôme non nul sur $\mathbb{C}$, de degré m et de zéros complexes $z_1, \dots, z_m$ comptés sans multiplicité :

$$\forall \xi \in \mathbb{C}, \quad P(\xi) = \sum_{k=1}^m a_k \xi^k = a_m \prod_{k=1}^m (\xi - z_k), \quad a_m \neq 0.$$

On associe à P l'opérateur différentiel agissant sur $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$: $P(D) = \sum_{k=1}^m \frac{a_k}{i^k} \frac{d^k}{dx^k}$. On pose $E = \frac{i^m}{a_m} (e_{z_1} H) \star \dots \star (e_{z_m} H)$.

6. Montrer que E est l'inverse de $P(D)\delta_0$ dans $\mathcal{D}'_+$.
7. En déduire le théorème de Malgrange-Ehrenpreis en dimension 1 :

Tout opérateur différentiel sur $\mathbb{R}$ non identiquement nul à coefficients constants admet une solution élémentaire.

On remarque qu'en dimension 1, résoudre l'équation différentielle linéaire à coefficients constants $P(D)T = \delta_0$ revient à résoudre l'équation caractéristique $P(\xi) = 0$, ce qui est similaire à la résolution de $P(D)u = 0$ dans le cas classique. Cela s'explique par le fait que dans les deux cas, on peut passer d'une équation à l'autre via la transformée de Fourier.