

Examen de Distributions

Le 2 juin 2016

Durée de l'épreuve : 3 heures.

Le sujet comporte deux pages.

Les documents, calculatrices et moyens de communication sont interdits, à l'exception d'une feuille au format A4 manuscrite.

Exercice 1. (Compétences de bases).

1. Soient $m \in \mathbb{N}$ et $d \geq 1$. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$. Donner la définition d'une distribution d'ordre au plus m sur Ω .
2. Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et $a \in \Omega$. Définir la distribution de Dirac au point a .
3. Soit H la distribution de Heaviside, distribution associée à la fonction caractéristique de $]0, +\infty[$ qui est localement intégrable sur $\mathbb{R}$. Calculer sa dérivée H' dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.
4. Soit $(f_n)_{n \geq 1}$ la suite de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall n \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = \cos^2(nx).$$

- (a) Justifier que, pour tout $n \geq 0$, $f_n \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$. On note T_{f_n} la distribution associée à f_n .
 - (b) Montrer que $(T_{f_n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et déterminer sa limite.
5. On considère l'équation différentielle :

$$(E) : \quad T'' = \delta_0, \quad \text{pour } T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$

- (a) Résoudre (E) dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.
- (b) Soit f une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. Justifier que, pour toute solution T de l'équation différentielle $T'' = f$, il existe une fonction u de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ telle que $T = T_u$.

Exercice 2. (Compétences attendues). Soient I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$ et $N \in \mathbb{N}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\delta_{x_0}^{(k)}$ désigne la k -ième dérivée de la distribution de Dirac au point x_0 . Soit $\chi \in C_0^\infty(I)$ telle que :

$$\forall \alpha > 0, \forall x \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha], \chi(x) = 1 \quad \text{et} \quad 0 \leq \chi \leq 1.$$

1. Pour $j \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}$, calculer $\langle \delta_{x_0}^{(k)}, (x - x_0)^j \chi \rangle$.
2. Soit $(a_0, \dots, a_N) \in \mathbb{C}^{N+1}$ tel que $\sum_{k=0}^N a_k \delta_{x_0}^{(k)} = 0$. Dédurre de la question précédente que, pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, $a_k = 0$.
3. Que peut-on dire de la famille de distributions $\{\delta_{x_0}, \delta'_{x_0}, \dots, \delta_{x_0}^{(N)}\}$ dans l'espace $\mathcal{D}'(I)$?

Exercice 3. (Compétences attendues). On considère l'application

$$T : \begin{array}{ccc} C_0^\infty(\mathbb{R}) & \rightarrow & \mathbb{C} \\ \varphi & \mapsto & \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \left(\varphi\left(\frac{1}{n}\right) - \varphi(0) \right). \end{array}$$

1. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) = \varphi(0) + x\psi(x), \quad \text{et} \quad \|\psi\|_\infty \leq \|\varphi'\|_\infty.$$

2. Montrer que T est une distribution d'ordre au plus 1 sur $\mathbb{R}$.

3. Pour tout entier $j \geq 1$, on note $\varphi_j \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ une fonction égale à 1 sur l'intervalle $[\frac{1}{j}, 1]$ et nulle hors de l'intervalle $[\frac{1}{j+1}, 2]$.

En considérant la suite $(\varphi_j)_{j \geq 1}$, montrer que T est d'ordre exactement 1.

4. Montrer que le support de T est égale à l'ensemble $S = \{0\} \cup \{\frac{1}{j}, j \in \mathbb{N}^*\}$.

5. On note, pour $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$,

$$\|\varphi\|_{C^1(S)} = \sup_{x \in S} |\varphi(x)| + \sup_{x \in S} |\varphi'(x)|.$$

On reprend la suite $(\varphi_j)_{j \geq 1}$ définie à la question 3 et on pose, pour tout $j \geq 1$, $\tilde{\varphi}_j = \frac{1}{\ln(1+j)} \varphi_j$.

- (a) Montrer que $\langle T, \tilde{\varphi}_j \rangle \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} 1$.

- (b) En déduire qu'il n'existe pas de constante $C > 0$ telle que :

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}), \quad |\langle T, \varphi \rangle| \leq C \|\varphi\|_{C^1(S)}.$$

- (c) Comparer les résultats des questions 2 et 5.b.

Exercice 4. (Compétences attendues). Soit $d \geq 1$. Soit u une fonction continue sur $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ telle que

$$\forall t > 0, \forall x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}, \quad u(tx) = t^{-d} u(x).$$

On note $|\cdot|$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^d$.

1. Soient $\varepsilon > 0$ et $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. On pose

$$I_\varepsilon(\varphi) = \int_{|x| \geq \varepsilon} u(x) \varphi(x) dx.$$

Montrer que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} I_\varepsilon(\varphi)$ existe pour toute $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ si et seulement si

$$\int_{|\omega|=1} u(\omega) d\omega = 0. \tag{1}$$

Indication : Passer en coordonnées polaires $(r, \omega) \in]0, +\infty[\times S^{d-1}$ pour $|x| \geq \varepsilon$. Puis, utiliser la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 1.

2. On suppose que la condition (1) est satisfaite. On pose alors, pour toute $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$,

$$\langle T, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} I_\varepsilon(\varphi).$$

Montrer que T définit un élément de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ d'ordre au plus 1.