

## Feuille de TD 1 : Espaces vectoriels normés

### I. Inégalité triangulaire

#### Exercice 1

Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel normé. Soient  $x, y \in E$  et  $r \geq 0$ . Montrer que  $x + \overline{B}(y, r) = \overline{B}(x + y, r)$ .

#### Exercice 2

Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel normé,  $E \neq \{0_E\}$ . Montrer que deux boules fermées de  $E$ ,  $\overline{B}(a, r)$  et  $\overline{B}(a', r')$  sont égales si et seulement si  $a = a'$  et  $r = r'$ .

### II. Équivalence de normes

#### Exercice 3

Pour  $x \in \mathbb{R}^n$  on pose :

$$N_1(x) = \sum_{i=1}^n |x_i|, \quad N_2(x) = \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\text{et } N_\infty(x) = \sup_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

1. Montrer que  $N_1$ ,  $N_2$  et  $N_\infty$  sont des normes sur  $\mathbb{R}^n$ .

2. Établir les inégalités :  $N_\infty \leq N_1 \leq nN_\infty$  et  $N_2 \leq N_1 \leq \sqrt{n}N_2$ .

#### Exercice 4

Soit  $E$  l'espace vectoriel des fonctions continues sur  $[0, 1]$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . On définit pour tout  $f \in E$ ,

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)| \quad \text{et} \quad \|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt.$$

1. Vérifier que  $\|\cdot\|_\infty$  et  $\|\cdot\|_1$  sont deux normes sur  $E$ .

2. Montrer que, pour tout  $f \in E$ ,  $\|f\|_1 \leq \|f\|_\infty$ .

3. En utilisant la suite des fonctions  $x \mapsto x^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , montrer que ces deux normes ne sont pas équivalentes.

#### Exercice 5

Sur l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels,  $E = \mathbb{R}[X]$ , on définit les applications  $N_1$  et  $N_2$  par :

$$N_1(P) = \sum_{k=0}^{+\infty} |P^{(k)}(0)| \quad \text{et} \quad N_2(P) = \sup_{t \in [-1,1]} |P(t)|.$$

1. Démontrer que  $N_1$  et  $N_2$  sont des normes sur  $E$ .

2. Étudier pour chacune de ces deux normes la convergence de la suite  $(\frac{1}{n}X^n)_{n \geq 1}$ .

3. Les normes  $N_1$  et  $N_2$  sont-elles équivalentes ?

#### Exercice 6

Soit  $E = \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$  l'espace des fonctions continûment dérivables sur  $\mathbb{R}$ .

1. Montrer que les expressions suivantes définissent des normes sur  $E$  :

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)| dx, \quad \|f\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|,$$

$$\|f\|_3 = |f(0)| + \sup_{x \in [0,1]} |f'(x)|.$$

On notera  $d_i$  les distances associées et  $E_i$  les espaces métriques correspondants.

2. Montrer que pour tout  $f$  de  $E$   $\|f\|_1 \leq \|f\|_\infty \leq \|f\|_3$ , et que la convergence pour les normes  $\|\cdot\|_\infty$ , et  $\|\cdot\|_3$ , implique la convergence simple. Montrer que l'application identique de  $E_3$  dans  $E_\infty$  est uniformément continue.

3. Soit  $(f_n)_{n \geq 1}$  la suite d'éléments de  $E$  définie par :  $\forall x \in [0, 1], f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}$ . Montrer que cette suite tend vers 0 dans  $E_\infty$ . En est-il de même dans  $E_3$  ? En déduire que l'application identique de  $E_\infty$  dans  $E_3$  n'est pas continue.

4. Montrer qu'aucune suite extraite de  $(f_n)_{n \geq 1}$  n'a de limite dans  $E_3$ .

5. Soit  $(g_n)_{n \geq 1}$  la suite d'éléments de  $E$  définie par :  $g_n(x) = \frac{x^n}{n^\alpha}$ ,  $x \in [0, 1]$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Pour quelles valeurs de  $\alpha$  la suite est-elle convergente pour chacune des normes précédentes ? On montrera dans chaque cas que pour les autres valeurs de  $\alpha$  la suite n'a aucune limite.

### Exercice 7

Soit  $\ell^1$  l'ensemble des suites de nombres réels  $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  pour lesquelles la série  $N_1(x) = \sum |x_n|$  est convergente.

1. Montrer que  $\ell^1$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$ .
2. Montrer que l'application  $x \rightarrow N_1(x)$  de  $\ell^1$  dans  $\mathbb{R}^+$  est une norme sur  $\ell^1$ .
3. Montrer que l'application  $x \rightarrow N_\infty(x) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$

de  $\ell^1$  dans  $\mathbb{R}^+$  est bien définie et est une norme sur  $\ell^1$ .

4. Déterminer pour quelles valeurs de  $a \in \mathbb{R}$  la suite  $x = (1, a, a^2, \dots, a^n, \dots)$  appartient à  $\ell^1$  et calculer  $N_1(x)$  et  $N_\infty(x)$ .
5. Les normes  $N_1$  et  $N_\infty$  sont-elles équivalentes ?

### III. Convergence simple et uniforme

#### Exercice 8

Soit  $\mathcal{C}([a, b])$  l'espace vectoriel des fonctions réelles continues définies sur  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ .

1. Montrer que si une suite de fonctions continues  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément vers  $f$  alors  $f$  est continue sur  $[a, b]$ .
2. Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $\mathcal{C}([a, b])$  convergeant uniformément vers  $f$  sur  $\mathcal{C}([a, b])$ , et soit  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite convergente de points de  $[a, b]$  de limite  $t$ . Montrer que  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t_n) = f(t)$ .

#### Exercice 9

Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite de fonctions de  $\mathcal{C}([0, 1])$  définie par  $f_n(x) = x^n$  pour tout  $x \in [0, 1]$ .

1. Montrer que la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge simplement vers une fonction  $f$  que l'on déterminera.
2. Pour  $0 < a < 1$  y a-t-il convergence uniforme sur  $[0, a]$  ?
3. Y a-t-il convergence uniforme sur  $[0, 1]$  ?

#### Exercice 10

1. Montrer que les applications définies sur  $\mathcal{C}([0, \pi])$  par :

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0, \pi]} |f(x)| \text{ et } \|f\|_1 = \int_0^\pi |f(x)| dx$$

sont des normes.

2. On considère la suite de fonctions de  $\mathcal{C}([0, \pi])$ ,  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  où  $f_n(x) = \sqrt{n} \cos x \sin^n x$ , pour tout  $x \in [0, \pi]$ .
  - a. Montrer que  $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente pour tout  $x \in [0, \pi]$ .
  - b. Montrer que  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  n'est pas uniformément convergente.
  - c. La suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge-t-elle au sens de  $\|\cdot\|_\infty$  ? au sens de  $\|\cdot\|_1$  ?