École Sup Galilée **2017-2018**
Filière MACS1
Analyse

Feuille de TD 2 : Espaces de Banach

Exercice 1

Soit $(E, || \ ||)$ un espace vectoriel normé et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E. On suppose que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy. Montrer qu'elle converge si et seulement si elle admet une sous-suite convergente.

Exercice 2

Soit $\mathcal{S}_0$ l'ensemble des suites réelles qui tendent vers 0.
1. Montrer que $\mathcal{S}_0$ est un espace vectoriel et que l'application $N_\infty : x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$ est une norme sur E.
2. Montrer que $(\mathcal{S}_0, N_\infty)$ est complet.

Exercice 3

Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1],\ R)$. On munit E de la norme $||f||_1 = \displaystyle\int_0^1 |f(x)|dx$. Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ la suite de fonctions définie par

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 \leq x < 1/2 \\ -nx + \frac{n}{2} + 1 & \text{si} \quad \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \\ 0 & \text{si} \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{n} < x \leq 1. \end{cases}$$

1. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $f_n \in E$ et que $(f_n)_{n\geq 1}$ est une suite de Cauchy de $(E, || \cdot ||_1)$.
2. Montrer que la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ converge simplement vers la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1/2 \\ 0 & \text{si} \quad \frac{1}{2} < x \leq 1. \end{cases}$$

3. L'espace normé $(E, || \cdot ||_1)$ est-il complet ?

Exercice 4

Soit $E = \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$ l'espace des fonctions continûment dérivables sur $\mathbb{R}$. On définit sur E les normes :

$$||f||_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| \text{ et } N(f) = ||f||_\infty + ||f'||_\infty.$$

1. On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ définie à l'exercice 3 et on pose pour tout $n \geq 1$ et tout $x \in [0,1]$, $g_n(x) = \int_0^x f_n(t)\mathrm{d}t$. À l'aide de la suite $(g_n)_{n\geq 1}$, montrer que $(E, || \ ||_\infty)$ n'est pas un espace de Banach.
2. Montrer que (E, N) est un espace de Banach.

Exercice 5

Soit ℓ^1 l'ensemble des suites de nombres réels $x = (x(n))_{n\in\mathbb{N}}$ pour lesquelles la série $N_1(x) = \sum |x(n)|$ est convergente. On veut montrer que (ℓ^1, N_1) est un espace de Banach.
Soit donc $(x_l)_{l\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de (ℓ^1, N_1). Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $L_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que, pour tous $p, q \geq L_\varepsilon$, $N_1(x_p - x_q) \leq \varepsilon$.
1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tous $p, q \geq L_\varepsilon$, $|x_p(n) - x_q(n)| \leq \varepsilon$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite $(x_l(n))_{l\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}$. On note cette limite $x(n)$.
3. Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\sum_{n\geq N} |x_{L_\varepsilon}(n)| \leq \varepsilon.$$

4. Montrer que pour tout $N' \geq N$,

$$\sum_{N\leq n\leq N'} |x(n)| \leq 2\varepsilon.$$

5. En déduire que $x \in \ell^1$ et que

$$\lim_{l\to+\infty} N_1(x_l - x) = 0.$$

Exercice 6

Soit $(E, || \ ||_E)$ un espace vectoriel normé, $(F, || \ ||_F)$ un espace de Banach, et $\mathcal{L}_c(E,F)$ l'espace vectoriel des applications linéaires continues de E dans F, muni de la norme :

$$|||f||| = \sup_{||x||_E=1} ||f(x)||_F.$$

Montrer que $(\mathcal{L}_c(E,F), ||| \ |||)$ est un espace de Banach.