(1) 2018-2019

Examen d'Analyse II. - Correction

Problème 1.

1.a. Soit $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \leq 1$. On a tout d'abord, par Taylor avec reste intégral :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \varphi(0) + x\psi(x) \text{ avec } \psi(x) = \int_0^1 \varphi'(xu)\,du$$

D'où :

$$\int_{|x|\geq\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx = \int_{\varepsilon\leq|x|\leq 1} \frac{\varphi(0)}{x}\,dx + \int_{\varepsilon\leq|x|\leq 1} \psi(x)\,dx + \int_{|x|\geq 1} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx$$

la dernière intégrale étant bien convergente car $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Or, par imparité de $x \mapsto \frac{\varphi(0)}{x}$ et puisque $\{x \in \mathbb{R} \mid \varepsilon \leq |x| \leq 1\}$ est symétrique $/0$ on a :

$$\int_{\varepsilon\leq|x|\leq 1} \frac{\varphi(0)}{x}\,dx = 0.$$

De plus ψ est continue donc la limite existe et :

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\varepsilon\leq|x|\leq 1} \psi(x)\,dx = \int_{-1}^{1} \psi(x)\,dx$$

Donc la limite existe et :

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{|x|\geq\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx = \int_{-1}^{1} \psi(x)\,dx + \int_{|x|\geq 1} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx$$

b. On a : $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,

$$\left|\langle vp(\tfrac{1}{x}), \varphi\rangle\right| \leq \int_{-1}^{1} \|\varphi'\|_\infty\,dx + \left|\int_{|x|\geq 1} \frac{1}{(1+|x|)\,x}\,dx\right| \|(1+|x|)\varphi\|_\infty$$

②

$$\leq 2\|\varphi'\|_\infty + \tilde{C}\ \|(1+|x|)\varphi\|_\infty \text{ avec } \tilde{C} = \int_{|x|\geq 1} \frac{dx}{(1+|x|)|x|}$$

$$\leq C \max_{0\leq p\leq 1} \max_{0\leq l\leq 1} \|(1+|x|)^l \varphi^{(p)}\|_\infty .$$

Donc $vp\left(\frac{1}{x}\right) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

2. (a) La fonction $x \mapsto x - i\varepsilon$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$

donc $x \mapsto \dfrac{1}{x-i\varepsilon}$ est continue et bornée sur $\mathbb{R}$

On peut donc lui associer une distribution tempérée.

(b) Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. On a : $\forall \alpha > 0, \forall \varepsilon > 0$,

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x-i\varepsilon}\,dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)(x+i\varepsilon)}{x^2+\varepsilon^2}\,dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \frac{x\varphi(x)}{x^2+\varepsilon^2}\,dx + i\int_{\mathbb{R}} \frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}\varphi(x)\,dx$$

Or : $$\int_{\mathbb{R}} \frac{x\varphi(x)}{x^2+\varepsilon^2}\,dx = \underbrace{\int_{-1}^{1} \frac{x\varphi(0)}{x^2+\varepsilon^2}\,dx}_{=0 \text{ par imparité}} + \int_{-1}^{1} \frac{x^2\psi(x)}{x^2+\varepsilon^2}\,dx + \int_{|x|\geq 1} \frac{x\varphi(x)}{x^2+\varepsilon^2}\,dx$$

et par le TCD : $$\int_{-1}^{1} \frac{x^2\psi(x)}{x^2+\varepsilon^2}\,dx \xrightarrow[\varepsilon\to 0^+]{} \int_{-1}^{1} \psi(x)\,dx$$

et : $$\int_{|x|\geq 1} \frac{x\varphi(x)}{x^2+\varepsilon^2}\,dx \xrightarrow[\varepsilon\to 0^+]{} \int_{|x|\geq 1} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx$$

car $$\left|\frac{x\varphi(x)}{x^2+\varepsilon^2}\right| \leq |\varphi(x)| \in L^1(\mathbb{R}), \quad \forall x, |x|\geq 1, \ \forall \varepsilon > 0$$

Donc $$\int_{\mathbb{R}} \frac{x\varphi(x)}{x^2+\varepsilon^2}\,dx \xrightarrow[\varepsilon\to 0^+]{} \int_{-1}^{1} \psi(x)\,dx + \int_{|x|\geq 1} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx = \left\langle vp\left(\frac{1}{x}\right), \varphi\right\rangle .$$

③ Puis : $\int_{\mathbb{R}} \frac{x\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}\varphi(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2\left(1+\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)^2\right)}\varphi(x)\,dx$

$u = \frac{x}{\varepsilon}$

$\frac{dx}{\varepsilon} = du$ $\rightarrow = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+u^2}\varphi(\varepsilon u)\,du$

Or $\varphi(\varepsilon u) \xrightarrow[\varepsilon\to 0^+]{} \varphi(0)$ et $\left|\frac{1}{1+u^2}\varphi(\varepsilon u)\right| \leq \frac{\|\varphi\|_\infty}{1+u^2} \in L^1(\mathbb{R})$

Donc par le TCD :

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(\varepsilon u)}{1+u^2}\,du \xrightarrow[\varepsilon\to 0^+]{} \varphi(0)\int_{\mathbb{R}}\frac{du}{1+u^2} = \pi\varphi(0)$$

Donc : $\int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x-i\varepsilon}\,dx \xrightarrow[\varepsilon\to 0^+]{} \langle vp\left(\frac{1}{x}\right), \varphi\rangle + i\pi\langle\delta_0, \varphi\rangle$

D'où : $\frac{1}{x-i\varepsilon} \xrightarrow[\varepsilon\to 0^+]{\mathcal{S}'(\mathbb{R})} vp\left(\frac{1}{x}\right) + i\pi\delta_0$.

3 a. On a $He^{-\varepsilon\cdot} \in L^1(\mathbb{R})$ donc :

$\forall \xi \in \mathbb{R}$, $\mathcal{F}(He^{-\varepsilon\cdot})(\xi) = \int_{\mathbb{R}} H(x)e^{-\varepsilon x}e^{-ix\xi}\,dx$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-(\varepsilon+i\xi)x}\,dx$$

$$= \left[-\frac{1}{\varepsilon+i\xi}e^{-(\varepsilon+i\xi)x}\right]_0^{+\infty}$$

$$= \frac{1}{\varepsilon+i\xi}$$

b. Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. On a :

$$\int_{\mathbb{R}} H(x)e^{-\varepsilon x}\varphi(x)\,dx \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{TCD} \int_{\mathbb{R}} H(x)\varphi(x)\,dx$$

d'où le résultat.

4

c. Par continuité de $\mathcal{F} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ on a :

$$\mathcal{F}(He^{-\varepsilon \cdot}) \xrightarrow[\varepsilon \to 0^+]{\mathcal{S}'(\mathbb{R})} \mathcal{F}(H).$$

Or $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $\mathcal{F}(He^{-\varepsilon \cdot})(\xi) = \dfrac{1}{\varepsilon + i\xi} = \dfrac{-i}{\xi - i\varepsilon}$

D'où par la question 2(b) : $\mathcal{F}(He^{-\varepsilon \cdot}) \xrightarrow[\varepsilon \to 0^+]{} -i\left(vp\left(\frac{1}{\xi}\right) + i\pi\delta_0\right)$

$$= \pi\delta_0 - i\, vp\left(\tfrac{1}{\xi}\right)$$

4. a. On a, par propriété de $\mathcal{F}$:

$$\mathcal{F}(|\cdot|) = \mathcal{F}(x \mapsto x(H(x) - H(-x)))$$
$$= i \frac{d}{d\xi} \mathcal{F}(H - H\circ(-Id))$$
$$= i \frac{d}{d\xi} \left(\mathcal{F}(H) - \mathcal{F}(H \circ (-Id))\right)$$

b. Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

$$\langle \mathcal{F}(H\circ(-Id)), \varphi \rangle = \langle H\circ(-Id), \mathcal{F}(\varphi) \rangle$$

$\mathcal{F}(He^{+\varepsilon \cdot} \circ (-Id)) \to \mathcal{F}(H\circ(-Id))$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} H(-\xi)\, \mathcal{F}(\varphi)(\xi)\, d\xi$$
$$= -\int_{+\infty}^{-\infty} H(\xi)\, \mathcal{F}(\varphi)(-\xi)\, d\xi$$
$$= +\int_{0}^{+\infty} \mathcal{F}(\varphi)(-\xi)\, d\xi$$
$$= \langle H, \mathcal{F}(\varphi)\circ(-Id) \rangle$$
$$= \langle H, \overline{\mathcal{F}(\varphi)} \rangle = \langle \overline{\mathcal{F}(H)}, \varphi \rangle$$

Donc $\mathcal{F}(H\circ(-Id)) = \overline{\mathcal{F}(H)} = \pi\delta_0 + i\, vp\left(\frac{1}{\xi}\right)$

5

c. Il vient alors :

$$\mathcal{F}(|\cdot|) = i\frac{d}{d\xi}\left(\cancel{\pi\delta_0} - i\,vp\left(\frac{1}{\xi}\right) - \left(\cancel{\pi\delta_0} + i\,vp\left(\frac{1}{\xi}\right)\right)\right)$$

$$= -2i^2\frac{d}{d\xi}vp\left(\frac{1}{\xi}\right) = 2\,vp\left(\frac{1}{\xi}\right)'$$

5. a. Soit $\varepsilon>0$. Pour $\varepsilon\leq 1$, On a : $\forall x\in\mathbb{R}$, $\varphi(x)=\varphi(0)+x\varphi'(0)+x^2\Phi(x)$

avec $\Phi(x)=\frac{1}{2}\int_0^1(1-u)\varphi''(xu)\,du$

$$\int_{|x|>\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x^2}dx - \frac{2\varphi(0)}{\varepsilon}$$

$$= \int_{\varepsilon\leq|x|\leq 1}\frac{\varphi(0)}{x^2}dx + \underbrace{\cancel{\int_{\varepsilon\leq|x|\leq 1}\frac{x\varphi'(0)}{x^2}dx}}_{=0 \text{ par imparité}} + \int_{\varepsilon\leq|x|\leq 1}\Phi(x)dx + \int_{|x|\geq 1}\frac{\varphi(x)}{x^2}dx - \frac{2\varphi(0)}{\varepsilon}$$

$$= \varphi(0)\left(\left[-\frac{1}{x}\right]_{-1}^{-\varepsilon} + \left[-\frac{1}{x}\right]_{\varepsilon}^{1}\right) + \int_{\varepsilon\leq|x|\leq 1}\Phi(x)dx + \int_{|x|\geq 1}\frac{\varphi(x)}{x^2}dx - \frac{2\varphi(0)}{\varepsilon}$$

$$= \varphi(0)\left(\cancel{\frac{1}{\varepsilon}} - 1 - 1 + \cancel{\frac{1}{\varepsilon}}\right) - \cancel{\frac{2\varphi(0)}{\varepsilon}} + \int_{\varepsilon\leq|x|\leq 1}\Phi(x)dx + \int_{|x|\geq 1}\frac{\varphi(x)}{x^2}dx$$

$$\xrightarrow[\varepsilon\to 0^+]{} -2\varphi(0) + \int_{-1}^{1}\Phi(x)dx + \int_{|x|\geq 1}\frac{\varphi(x)}{x^2}dx$$

D'où l'existence de la limite.

b. On a : $\forall\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$, $\left|\left\langle Pf\left(\frac{1}{x^2}\right),\varphi\right\rangle\right| \leq 2\|\varphi\|_\infty + 2\|\varphi''\|_\infty + \left(\underbrace{\int_{|x|\geq 1}\frac{dx}{x^2}}_{=\left[-\frac{1}{x}\right]_{-\infty}^{-1}+\left[-\frac{1}{x}\right]_1^{+\infty}=1+1=2}\right)\|\varphi\|_\infty$

$$\leq 4\|\varphi\|_\infty + 2\|\varphi''\|_\infty$$

Donc $Pf\left(\frac{1}{x^2}\right)\in\mathcal{S}'(\mathbb{R})$

⑥ c. Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

$$\left\langle vp\left(\frac{1}{x}\right)', \varphi \right\rangle = -\left\langle vp\left(\frac{1}{x}\right), \varphi' \right\rangle$$

$$= -\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi'(x)}{x} dx$$

$\varphi(\varepsilon) = \varphi(0) + \varepsilon\psi(\varepsilon)$

$\varphi(-\varepsilon) = \varphi(0) - \varepsilon\psi(-\varepsilon)$

$$= -\lim_{\varepsilon \to 0} \left(\left[\frac{\varphi(x)}{x}\right]_{-\infty}^{-\varepsilon} + \left[\frac{\varphi(x)}{x}\right]_{\varepsilon}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2} dx + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x^2} dx \right)$$

$$= -\lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(\int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2} dx - \frac{\varphi(-\varepsilon)}{\varepsilon} - \frac{\varphi(\varepsilon)}{\varepsilon} \right)$$

$$= -\lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(\int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2} dx - \frac{2\varphi(0)}{\varepsilon} - \left(-\frac{\cancel{\varepsilon}\psi(-\varepsilon)}{\cancel{\varepsilon}}\right) - \frac{\cancel{\varepsilon}\psi(\varepsilon)}{\cancel{\varepsilon}} \right)$$

$$= -\lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(\int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2} dx - \frac{2\varphi(0)}{\varepsilon} + \underbrace{\left(\psi(-\varepsilon) - \psi(\varepsilon)\right)}_{\xrightarrow{\varepsilon \to 0} \psi(0) - \psi(0) = 0} \right)$$

$$= -\lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(\int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2} dx - \frac{2\varphi(0)}{\varepsilon} \right)$$

$$= -\left\langle Pf\left(\frac{1}{x^2}\right), \varphi \right\rangle$$ On a bien $vp\left(\frac{1}{x}\right)' = -Pf\left(\frac{1}{x^2}\right)$

d. D'où : $\mathcal{F}(|\cdot|) = 2vp\left(\frac{1}{\xi}\right)' = -2Pf\left(\frac{1}{\xi^2}\right)$.

e. D'où : $-2\mathcal{F}\left(Pf\left(\frac{1}{\xi^2}\right)\right) = \mathcal{F}\mathcal{F}(|\cdot|) = 2\pi|\cdot|$

et $\mathcal{F}\left(Pf\left(\frac{1}{\xi^2}\right)\right) = -\pi|\cdot|$.