2018-2019

M1 Mathématiques

Examen d'Analyse II - Correction

(1)

Partie II.

Exercice 2.

1. On a : $\forall n \in \mathbb{Z}$, $c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-iax} e^{-inx} dx$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[-\frac{1}{i(n+a)} e^{-i(n+a)x}\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\frac{i}{n+a}\left(e^{-2i\pi n} e^{-ia2\pi} - e^{-i(n+a)0}\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\frac{i}{n+a}\left(e^{-2ia\pi}-1\right) = \frac{1}{2\pi}\frac{i}{n+a} e^{-ia\pi}\left(e^{-ia\pi} - e^{ia\pi}\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\frac{1}{n+a} e^{-ia\pi}\frac{1}{i}\left(e^{ia\pi} - e^{-ia\pi}\right) = \frac{e^{-ia\pi}}{n+a}\sin(a\pi).$$

Donc : $\forall n \in \mathbb{Z}$, $c_n(f) = \frac{e^{-ia\pi}}{n+a}\sin(a\pi)$

2. Par Parseval : $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx$

$$\Leftrightarrow \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{\pi^2}\frac{1}{(n+a)^2}\sin^2(a\pi) = 1 \Leftrightarrow \sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(n+a)^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi a)}$$

Exercice 3 :

1. • Tout d'abord la fonction nulle est nulle pp sur A donc elle est dans E. Puis si $f, g \in E$ alors $f+g \in E$ car si f est nulle sur $A_f \subset A$ avec $Leb(A_f) = Leb(A)$ et g est nulle sur $A_g \subset A$ avec $Leb(A_g) = Leb(A)$ alors $f+g$ est nulle sur $A_f \cap A_g$ et on a bien $Leb(A_f \cap A_g) = Leb(A)$ (car en passant aux complémentaires la réunion de deux ensembles de mesure nulle est de mesure nulle).
Enfin si $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f \in E$, λf est nulle pp sur A donc $\lambda f \in E$.

Donc E est un sev de $L^2(\mathbb{R}^d)$.

• Soit maintenant $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E qui converge vers f dans $L^2(\mathbb{R}^d)$. Montrons que $f \in E$. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad \int_A |f|^2 = \int_A |f - f_n + f_n|^2 \underset{\text{Cauchy-Schwartz}}{\leq} \left(\left(\int_A |f-f_n|^2\right)^{1/2} + \left(\int_A |f_n|^2\right)^{1/2}\right)^2$$

car pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$\int_A |f_n|^2 = 0$ car $f_n \in E$ et f_n est donc nulle pp sur A.

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_A |f|^2 \leq \int_A |f-f_n|^2 \leq \int_{\mathbb{R}^d} |f - f_n|^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

par hypothèse. Donc $\int_A |f|^2$ est nulle et f est nulle pp sur A. Donc $f \in E$. Ainsi E est un sev fermé de $L^2(\mathbb{R}^d)$.

2. Soit $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$. On remarque que : $\forall x \in A$, $f(x)\underbrace{\mathbb{1}_{A^c}(x)}_{=0} = 0$

donc $f\mathbb{1}_{A^c} \in E$.

Par ailleurs si $g \in E$, alors : $\int_{\mathbb{R}^d} f\mathbb{1}_A g = \int_A f g = 0$ car g est nulle pp sur A. Donc $f\mathbb{1}_A \in E^\perp$.

Or E étant un sev fermé de $L^2(\mathbb{R}^d)$ qui est un espace de Hilbert :

$$L^2(\mathbb{R}^d) = E \overset{\perp}{\oplus} E^\perp.$$

② Puisque $f = f\mathbb{1}_A + f\mathbb{1}_{A^c}$ et $f\mathbb{1}_A \in E^\perp$, $f\mathbb{1}_{A^c} \in E$, par unicité de la décomposition et définition de $P(f)$ on a :

$$P(f) = f\mathbb{1}_{A^c}.$$

Exercice 4.

1. Soit $u \in H$. Puisque $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de H on a : $u = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (u,e_n)e_n$ avec convergence dans H.

Soit $N \geq 1$. Par linéarité de ϕ :

$$\phi\left(\sum_{n=-N}^{N} (u,e_n)e_n\right) = \sum_{n=-N}^{N} (u,e_n)\,\phi(e_n)$$

Puis, par continuité de ϕ :

$$\left\|\phi\left(\sum_{n=-N}^{N}(u,e_n)e_n\right) - \phi(u)\right\| = \left\|\phi\left(\sum_{n=-N}^{N}(u,e_n)e_n\right) - \phi\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(u,e_n)e_n\right)\right\| \leq |||\phi|||\,\left\|\sum_{n=-N}^{N}(u,e_n)e_n - \sum_{n=-\infty}^{+\infty}(u,e_n)e_n\right\|$$

Or $\left\|\sum_{n=-N}^{N}(u,e_n)e_n - \sum_{n=-\infty}^{+\infty}(u,e_n)e_n\right\| \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$ donc $\left(\sum_{n=-N}^{N}(u,e_n)\,\phi(e_n)\right)_{N\geq 1}$ converge vers $\phi(u)$ dans H. D'où : $\phi(u) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (u,e_n)\,\phi(e_n)$.

2. a. Soit $f \in H$. Par Pythagore :

$$\|T(f)\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\lambda_n|^2\,|c_n(f)|^2$$

$$\underset{\text{Parseval}}{\leq} \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2\right) \sup_{n\in\mathbb{Z}} |\lambda_n|^2$$

$$= \left(\sup_{n\in\mathbb{Z}} |\lambda_n|^2\right) \|f\|^2$$

D'où : $\|T(f)\| \leq \left(\sup_{n\in\mathbb{Z}} |\lambda_n|\right) \|f\|$.

Donc T est continue et $|||T||| \leq \sup_{n\in\mathbb{Z}} |\lambda_n|$. ($T$ est clairement linéaire)

Par ailleurs, par définition des coefficients de Fourier : $c_n(e_m) = \begin{cases} 1 \text{ si } n=m \\ 0 \text{ si } n\neq m \end{cases}$

Donc : $T(e_n) = \lambda_n e_n$ et $\|T(e_n)\| = |\lambda_n|$, $\forall n \in \mathbb{Z}$.

Donc $\|T\| = \sup_{n\in\mathbb{Z}} |\lambda_n|$ par définition du sup, car $\|e_n\| = 1$, $\forall n \in \mathbb{Z}$.

b. Soit $f \in H$. On a : $\forall h \in \mathbb{R}$, $(\tau_h \circ T)(f) = \tau_h(T(f)) = \tau_h\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \lambda_n c_n(f) e_n\right)$

$$\underset{\text{C° de } \tau_h \text{ et linéarité}}{=} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \lambda_n c_n(f)\,\tau_h(e_n).$$

D'où : $\forall x \in]0, 2\pi[$,

$$(\tau_h \circ T)(f)(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \lambda_n c_n(f) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-inh} e^{inx} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \lambda_n c_n(f) e^{-inh} e_n(x)$$

Or : $c_n(f)e^{-inh} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx}\,dx\, e^{-inh} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-in(x+h)}\,dx$

$$\underset{y=x+h}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_h^{2\pi+h} f(y-h) e^{-iny}\,dy \underset{2\pi\text{-périodicité}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} \tau_h(f)(y) e^{-iny}\,dy$$

$$= c_n(\tau_h(f)).$$

Finalement on a bien : $(\tau_h \circ T)(f)(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \lambda_n c_n(\tau_h(f)) e_n(x) = T(\tau_h(f))(x)$

On a bien : $\tau_h \circ T = T \circ \tau_h$, $\forall h \in \mathbb{R}$.

3. a. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, e_n est 2π-périodique. De plus, ϕ commutant avec toutes les translations elle commute en particulier avec $\tau_{-2\pi}$. D'où : $\tau_{-2\pi} \circ \phi(e_n) = \phi(\tau_{-2\pi}(e_n)) = \phi(e_n)$ et $g_n = \phi(e_n)$ est 2π-périodique.

b. Soient $(n,p) \in \mathbb{Z}^2$, $n \neq p$. Soit $h \in \mathbb{R}$.

③ On a : $(g_m, e_p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} g_m(x) e^{-ipx} dx \underset{x=y-h}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-h}^{-h+2\pi} g_m(y-h) e^{-ipy} e^{iph} dy$

$$= \frac{e^{iph}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-h}^{-h+2\pi} \tau_h \phi(e_m)(y) e^{-ipy} dy$$

$$= \frac{e^{iph}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-h}^{-h+2\pi} \phi(\underbrace{\tau_h(e_m)}_{= e^{-imh} e_m})(y) e^{-ipy} dy = \frac{e^{iph} e^{-imh}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-h}^{-h+2\pi} \underbrace{\phi(e_m)(y) e^{-ipy}}_{2\pi-\text{périodique}} dy$$

$$= \frac{e^{i(p-m)h}}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} \phi(e_m)(y) e^{-ipy} dy = e^{i(p-m)h} (g_m, e_p).$$

Pour $h = \frac{\pi}{p-m}$ on obtient : $(g_m, e_p) = -(g_m, e_p)$ i.e. $(g_m, e_p) = 0$

c. Posons pour tout $m \in \mathbb{Z}$, $\lambda_m = (g_m, e_m)$.

Alors : $\forall m \in \mathbb{Z}$, $|\lambda_m| \leq \|g_m\| \|e_m\| = \|\phi(e_m)\| \leq \|\phi\|$

Donc $(\lambda_m)_{m\in\mathbb{Z}}$ est bornée.

Soit $f \in H$. Par (1) : $\phi(f) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} c_m(f) \phi(e_m)$.

Or $\phi(f) \in H$ donc $\phi(f) = \sum_{p\in\mathbb{Z}} (\phi(f), e_p) e_p$

et $\phi(f) = \sum_{p\in\mathbb{Z}} \left(\sum_{m\in\mathbb{Z}} c_m(f) \phi(e_m), e_p \right) e_p = \sum_{p\in\mathbb{Z}} \sum_{m\in\mathbb{Z}} c_m(f) \underbrace{(\phi(e_m), e_p)}_{\substack{=0 \text{ si } p\neq m \\ =\lambda_m \text{ si } p=m}} e_p$

par linéarité et C^0 de $f \mapsto (f|g)$, $\forall g$.

$$= \sum_{m\in\mathbb{Z}} c_m(f) \lambda_m e_m.$$

Donc ϕ est un multiplicateur de Fourier.