Université Paris 13, Institut Galilée
M1 Mathématiques Année universitaire 2018-2019

Examen d'Analyse 2

9 janvier 2019

Durée de l'épreuve : 3 heures. Les parties I et II sont à rendre sur des *copies séparées.*
Seuls les documents de cours et de TD sont autorisés, à l'exclusion de tout autre document.
Les calculatrices et moyens de communication sont interdits.

Partie I

Exercice 1.

1. (a) Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Justifier l'existence de la limite

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{|x|\geq\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\mathrm{d}x.$$

On pose alors,

$$\langle \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right), \varphi\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{|x|\geq\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\mathrm{d}x.$$

(b) Montrer que cette expression définit une distribution tempérée.

2. (a) Soit $\varepsilon > 0$. Justifier que l'on peut associer à la fonction $x \mapsto \frac{1}{x-\mathrm{i}\varepsilon}$ une distribution tempérée définie par la formule

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}),\ \langle \frac{1}{x-\mathrm{i}\varepsilon}, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x-\mathrm{i}\varepsilon}\mathrm{d}x.$$

(b) Montrer que, dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$,

$$\frac{1}{x-\mathrm{i}\varepsilon} \xrightarrow[\varepsilon\to 0^+]{} \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right) + \mathrm{i}\pi\delta_0.$$

3. Soit $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction de Heaviside définie par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ H(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x < 0. \end{cases}$$

(a) Soit $\varepsilon > 0$. Calculer la transformée de Fourier de la fonction $H\mathrm{e}^{-\varepsilon\cdot} : x \mapsto H(x)\mathrm{e}^{-\varepsilon x}$.

(b) Montrer que, dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, $H\mathrm{e}^{-\varepsilon\cdot} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} H$.

(c) En déduire que la transformée de Fourier de H dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ est donnée par

$$\mathcal{F}(H) = \pi\delta_0 - \mathrm{i}\mathrm{vp}\left(\frac{1}{\xi}\right).$$

4. (a) En utilisant l'identité : $\forall x \in \mathbb{R},\ |x| = xH(x) - xH(-x)$, montrer que

$$\mathcal{F}(|\cdot|) = \mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\left(\mathcal{F}(H) - \mathcal{F}(H\circ(-\mathrm{Id}))\right) \qquad \text{où Id :} \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x. \end{array}$$

(b) Justifier que $\mathcal{F}(H\circ(-\mathrm{Id})) = \pi\delta_0 + \mathrm{i}\mathrm{vp}\left(\frac{1}{\xi}\right)$.

5. (a) Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Justifier l'existence de la limite

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\int_{|x|\geq\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2}\mathrm{d}x - 2\frac{\varphi(0)}{\varepsilon}\right) := \langle \mathrm{Pf}\left(\tfrac{1}{x^2}\right), \varphi\rangle.$$

(b) Montrer que la forme linéaire $\mathrm{Pf}\left(\frac{1}{x^2}\right)$ ainsi définie sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est une distribution tempérée.

(c) Montrer que, dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, $\left(\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right)\right)' = -\mathrm{Pf}\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

(d) En déduire la transformée de Fourier dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ de $|\cdot|$: $x \mapsto |x|$.

(e) En déduire que, dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, $\mathcal{F}\left(\mathrm{Pf}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) = -\pi|\xi|$.

Partie II

Exercice 2. Soit $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ la fonction 2π-périodique donnée par $f(x) = e^{-iax}$ pour tout $x \in [0, 2\pi[$.

1. Calculer les coefficients de Fourier $c_n(f)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

2. En déduire que
$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(n+a)^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi a)}.$$

Exercice 3. Soit A une partie mesurable de $\mathbb{R}^d$, et soit E l'ensemble des fonctions de $L^2(\mathbb{R}^d)$ qui sont nulles presque partout sur A.

1. Vérifier que E est un sous-espace vectoriel. Montrer que E est fermé dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ (Indication : on pensera à utiliser la fonction $\mathbb{1}_A$).

2. Montrer que pour tout $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, la projection orthogonale $P(f)$ de f sur E est donnée par $P(f) = f \cdot \mathbb{1}_{A^c}$, où $A^c = \mathbb{R}^d \setminus A$.

Exercice 4. Soit H un $\mathbb{C}$-espace de Hilbert séparable et $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ une base hilbertienne de H.

1. Soit $\phi : H \to H$ une application linéaire continue. Montrer que
$$\forall u \in H, \quad \phi(u) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (u, e_n)\phi(e_n) \tag{1}$$
(et que la série au second membre de (1) converge dans H).

2. On prend $H = L^2(]0, 2\pi[; \mathbb{C})$ et $e_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}$. Soit $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ une suite bornée de nombres complexes. On appelle multiplicateur de Fourier associé à (λ_n) l'application $T : H \to H$ définie par
$$\forall f \in H, \quad T(f) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \lambda_n c_n(f) e_n,$$
où les $c_n(f)$ sont les coefficients de Fourier de f associés aux e_n.

   a. Montrer que T est une application linéaire continue et que $\|T\| = \sup_{n \in \mathbb{Z}} |\lambda_n|$.

   b. Pour tout $h \in \mathbb{R}$, on définit l'opérateur de translation τ_h par $(\tau_h f)(x) = f(x-h)$ pour tout $f \in H$ (les fonctions de H étant étendues à $\mathbb{R}$ comme fonctions 2π-périodiques). Montrer que T commute avec les translations, i.e. $\forall h \in \mathbb{R}$, $\tau_h \circ T = T \circ \tau_h$.

3. On prend encore $H = L^2(]0, 2\pi[; \mathbb{C})$ et $e_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}$. On veut montrer réciproquement que si $\phi : H \to H$ est une application linéaire continue qui commute avec les translations, alors ϕ est un multiplicateur de Fourier, associé à une certaine suite bornée de nombres complexes (λ_n). Soit donc $\phi : H \to H$ une application linéaire continue qui vérifie
$$\forall h \in \mathbb{R}, \quad \tau_h \circ \phi = \phi \circ \tau_h.$$

   a. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on pose $g_n = \phi(e_n)$. Montrer que g_n est 2π-périodique.

   b. Montrer que $(g_n, e_p) = 0$ pour tout $p \neq n$ [*NB: cette question est plus difficile*].

   c. En posant $\lambda_n = (g_n, e_n)$ conclure à l'aide de la question 1.