Institut Galilée **2018-2019**
Filière M1
Distributions

Feuille de TD 1 : Rappels d'intégration et de calcul différentiel

Exercice 1

Existe-t-il une fonction g intégrable sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $n\mathrm{e}^{-n|x|} \leq g(x)$?

Exercice 2

Calculer,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t.$$

Exercice 3

1. Montrer que, pour tout $u \in [0, 1[$, $u + \log(1-u) \leq 0$.

2. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Calculer

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} \exp\left[\lambda^3 \log\left(1 - \frac{y^2}{\lambda^3}\right)\right] \varphi\left(\frac{y}{\lambda}\right) \mathrm{d}y.$$

Exercice 4

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Pour $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, on pose

$$A = \sup\left\{\int_\Omega f\varphi\,, \quad \varphi \in \mathcal{C}^0_c(\Omega), \quad \|\varphi\|_\infty \leq 1\right\}$$

Montrer que $f \in L^1(\Omega) \Leftrightarrow A < +\infty$ et que dans ce cas $A = \|f\|_1$.

Exercice 5
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que, dans $\mathbb{R}^d$,
1. $\int_{B(0,1)} \frac{1}{\|x\|^\alpha}\mathrm{d}x$ est convergente si et seulement si $\alpha < d$.
2. $\int_{\mathbb{R}^d\setminus B(0,1)} \frac{1}{\|x\|^\alpha}\mathrm{d}x$ est convergente si et seulement si $\alpha > d$.

Exercice 6

Soit $u \in \mathcal{C}^0(\Omega)$, avec Ω ouvert de $\mathbb{R}^d$.
1. Vérifier $\mathrm{supp}\ u = \overline{\{x \in \mathbb{R}^d, \quad u(x) \neq 0\}}$.
2. Vérifier l'équivalence entre ($x \in \mathrm{supp}\ u$) et

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\varphi \in \mathcal{C}^0_c(B(x,\varepsilon)), \quad \int u(t)\varphi(t)\ dt \neq 0\,.$$

3. Pour $f, g \in \mathcal{C}^0_c(\mathbb{R}^d)$, on pose

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)\ dy$$

Montrer que $f * g$ est continue à support compact, avec $\mathrm{supp}\ (f * g) \subset \mathrm{supp}\ (f) + \mathrm{supp}\ (g)$.

Exercice 7

Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. On considère l'application

$$Tf\ :\ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \int_0^1 f(x-y)\mathrm{d}y \end{array}.$$

1. Montrer que, si f est continue à support compact, Tf est continue.

2. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues à support compact qui converge vers f dans $L^1(\mathbb{R})$. Montrer que $(Tf_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers Tf uniformément sur $\mathbb{R}$. En déduire que Tf est continue sur $\mathbb{R}$.

3. En déduire que le produit de convolution sur $L^1(\mathbb{R})$ n'admet pas d'élément unité.

Exercice 8
Montrer que pour $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, il existe $\Psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\varphi(x) = \varphi(0) + x\psi(x)$.

Exercice 9
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$. Montrer que pour $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ et $x_0 \in \Omega$, il existe une famille $(g_i)_{1\leq i\leq d}$ de $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ telle que

$$\forall x \in \Omega,\ f(x) = f(x_0) + \sum_{i=1}^d (x_i - x_{0,i})g_i(x)\,.$$

Exercice 10

1. Démontrer la formule de Green en dimension 2 quand le domaine Ω est un rectangle.
2. le domaine Ω est déterminé par les axes de coordonnées et le graphe d'une fonction décroissante :

$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x \in [0,a], y \in [0, f(x)]\right\}$$

où $f \in \mathcal{C}^1([0,a];\mathbb{R})$ est strictement décroissante avec $f' < 0$ et $f(a) = 0$.
3. le domaine Ω est un ouvert $\mathcal{C}^1$ (éventuellement $\mathcal{C}^1$ par morceaux) borné de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 11

On travaille dans un ouvert borné Ω de $\mathbb{R}^n$ de bord $\mathcal{C}^1$. On note $\Delta = \partial^2_{x_1} + \cdots + \partial^2_{x_n}$.
1.a. Pour $u, v \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$, montrer que

$$\int_\Omega u(-\Delta v)\ dx = \int_\Omega \nabla u.\nabla v\ dx - \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial v}{\partial n}\ d\sigma\,.$$

où dx désigne la mesure de Lebesgue, $d\sigma$ la mesure surfacique sur $\partial\Omega$ et $\frac{\partial u}{\partial n} = \nabla u.\vec{n}$, $\vec{n}$ vecteur normal sortant.
1.b. Montrer que

$$\int_\Omega u(\Delta v) - (\Delta u)v\ dx = \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial v}{\partial n} - \frac{\partial u}{\partial n}v\ d\sigma$$

2. Soient u et v dans $C^1(\overline{\Omega})$. Montrer que, pour tout $i \in \{1,\ldots,d\}$,

$$\int_\Omega v\partial_{x_i}u\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} u\ v\ n_i\mathrm{d}\sigma - \int_\Omega u\partial_{x_i}v\mathrm{d}x.$$

Exercice 12 - *Théorème de Borel*

Soient $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes et $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de réels strictement positifs. Soit $\varphi : \mathbb{R} \to [0,1]$ une fonction de classe C^∞ telle que $\varphi(x) = 1$ pour $x \in [-1,1]$ et supp $\varphi \subset [-2,2]$. On introduit enfin la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où chaque $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = c_n\varphi(t_n x)\frac{x^n}{n!}.$$

1. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, donner l'expression de la dérivée k-ième $f_n^{(k)}$.
2. On pose, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$A_n = \max_{k=0,\ldots,n} \sup_{x\in\mathbb{R}} |\varphi^{(k)}(x)|.$$

Pour $x \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$, majorer $|f_n^{(k)}(x)|$ en fonction de A_n, $|c_n|$ et t_n.
3. Déterminer une suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels strictement positifs telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $k \in \mathbb{N}$, $|f_n^{(k)}(x)| \leq \frac{1}{2^n}$.
4. Pour ce choix de $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x).$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, calculer $f^{(k)}(0)$. Conclure.
5. *Application :* montrer que toute fonction de classe C^∞ sur $[0,+\infty[$ se prolonge en une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.