Institut Galilée **2018-2019**
Filière M1
Distributions

Feuille de TD 2 : Distributions - Exemples, ordre et support.

Exercice 1 - Autour du Dirac

Soit $\varepsilon > 0$. On considère la fonction ϕ_1^ε définie sur $\mathbb{R}$ par $\phi_1^\varepsilon(x) = 0$ pour $|x| \geq \varepsilon$, et $\phi_1^\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^2}(\varepsilon - |x|)$ pour $|x| \leq \varepsilon$.
1. Déterminer la limite simple lorsque ε tend vers 0 de $(\phi_1^\varepsilon)_\varepsilon$.
2. Calculer l'intégrale sur $\mathbb{R}$ de ϕ_1^ε.
3. Soient a et b sont deux réels distincts. Déterminer, suivant la position relative de 0 par rapport à a et b, la valeur de la limite, lorsque ε tend vers 0, de l'intégrale $\int_a^b \phi_1^\varepsilon(x)dx$. On note cette limite $I_1(a,b)$. Que mesure cette limite ?
On définit

$$I_1^\varepsilon(\phi) = \int_{\mathbb{R}} \phi_1^\varepsilon(x)\phi(x)dx$$

où ϕ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et bornée.
4. Déterminer la limite lorsque ε tend vers 0 de $I_1^\varepsilon(\phi)$.
5. Vérifier qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\forall \varepsilon > 0,\ |I_1^\varepsilon(\phi)| \leq C \max_{x\in\mathbb{R}} |\phi(x)|.$$

Exercice 2 - Le peigne de Dirac

On reprend les notations de l'exercice 4. On veut construire un réseau périodique infini de charges ponctuelles placées en tout point entier relatif. La fonction associée simple est alors

$$\Psi^\varepsilon(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \phi_1^\varepsilon(x-n).$$

1. Vérifier que pour ε suffisamment petit, $\Psi^\varepsilon \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$.
2. Soit ϕ une fonction de classe C^2. Soient $m < n$ deux entiers. Montrer que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{m-\varepsilon}^{n+\varepsilon} \Psi^\varepsilon(x)\phi(x)dx = \sum_{p=m}^{p=n} \phi(p).$$

3. Que peut-on supposer sur ϕ pour que l'on puisse faire tendre m vers $-\infty$ et n vers $+\infty$ dans l'expression précédente ?

Exercice 3

Montrer que $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ est dense dans l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ pour la topologie de ce dernier.
On pourra pour cela introduire une fonction $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ à valeurs réelles telle que $\chi \equiv 1$ sur la boule unité $B(0,1)$, nulle hors de $B(0,2)$ et $0 \leq \chi \leq 1$. Alors, pour tout $n \geq 1$, on considèrera la fonction $\chi_n = \chi(\frac{\cdot}{n})$.

Exercice 4

Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Montrer que les expressions suivantes définissent des distributions dont on déterminera l'ordre et le support :

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(x^2)\ \mathrm{d}x, \quad \int_{\mathbb{R}} \varphi'(x)e^{x^2}\ \mathrm{d}x.$$

Exercice 5

1. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Montrer que l'expression suivante définit une distribution T d'ordre au plus 1 :

$$\int_0^{+\infty} \varphi'(x)\log(x)\ \mathrm{d}x.$$

2. Soit φ_n une fonction plateau valant 1 sur $[\frac{1}{n}, 1]$ et dont le support est inclus dans $[\frac{1}{2n}, 2]$.
a. Minorer $< T, \varphi_n >$.
b. En déduire que T est une distribution d'ordre exactement 1.
3. Déterminer le support de T.

Exercice 6 - Valeur principale de $\frac{1}{x}$

Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$.
1. Montrer qu'il existe $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \varphi(0) + x\psi(x)$.
2. Montrer que la limite

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\ \mathrm{d}x$$

existe.
3. Montrer que cette expression définit une distribution d'ordre au plus 1, appelée *valeur principale de* $\frac{1}{x}$ et notée $\mathrm{vp}(\frac{1}{x})$.

4. En considérant φ_n comme à l'exercice 5, montrer que $\mathrm{vp}(\frac{1}{x})$ est d'ordre exactement 1.

Exercice 7

Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$.
1. Montrer que l'expression suivante définit une distribution T d'ordre au plus 1 :

$$< T, \varphi >= \int_0^\infty \big(\varphi(1/t^2, \sin t) - \varphi(0, \sin t)\big)\ \mathrm{d}t.$$

2. Calculer le support de T.

Exercice 8

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert et soit $x_0 \in I$. Montrer qu'il n'existe pas de fonction $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(I)$ telle que $T_f = \delta_{x_0}$.

Exercice 9 - Partie finie de x^α

Soient $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ et $\varepsilon > 0$.
1. Pour $\alpha \in]-2, -1[$, montrer que :

$$\int_\varepsilon^\infty x^\alpha \varphi(x)\ \mathrm{d}x = A_\varphi \varepsilon^{\alpha+1} + R_\varepsilon$$

où $A_\varphi \in \mathbb{R}$ ne dépend pas de ε et où R_ε tend vers une limite lorsque ε tend vers 0^+.
2. On pose : $< \mathrm{pf}(x^\alpha), \varphi >= \lim_{\varepsilon \to 0^+} R_\varepsilon$. Montrer que $\mathrm{pf}(x^\alpha)$ est une distribution d'ordre au plus 1.

Exercice 10

Soit u une fonction continue sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ telle que

$$\forall t > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},\ u(tx) = t^{-n}\ u(x).$$

1. Soient $\varepsilon > 0$ et $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. On pose

$$I_\varepsilon(\varphi) = \int_{|x| \geq \varepsilon} u(x)\varphi(x)\mathrm{d}x.$$

Montrer que $\lim_{\varepsilon \to 0^+} I_\varepsilon(\varphi)$ existe pour toute $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ si et seulement si

$$\int_{|\omega|=1} u(\omega)\mathrm{d}\omega = 0. \qquad (1)$$

Indication : Passer en coordonnées polaires $(r, \omega) \in]0, +\infty[\times S^{n-1}$ *pour* $|x| \geq \varepsilon$. *Puis utiliser la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre* 1.
2. On suppose que la condition (1) est satisfaite. On pose alors, pour toute $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$,

$$< T, \varphi >= \lim_{\varepsilon \to 0^+} I_\varepsilon(\varphi).$$

Montrer que T définit un élément de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ d'ordre au plus 1.

Exercice 11 - Distribution d'ordre infini

Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Montrer que l'expression

$$< T, \varphi >= \sum_{p=0}^\infty \varphi^{(p)}(p)$$

définit une distribution sur $\mathbb{R}$, d'ordre infini.